

**ESTUDO DA PROPAGAÇÃO DE CONTAMINANTE EM
ATERROS SANITÁRIOS VIA GITT**

por

Flávio Alves de Albuquerque

*Tese de Doutorado apresentado à Universidade Federal da Paraíba
para obtenção do grau de Doutor.*

FLÁVIO ALVES DE ALBUQUERQUE

**ESTUDO DA PROPAGAÇÃO DE CONTAMINANTE EM
ATERROS SANITÁRIOS VIA GITT**

Tese apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do título de doutor.

Orientador: Carlos Antônio Cabral dos Santos

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A345e Albuquerque, Flavio Alves de.

Estudo da Propagação de Contaminante em Aterros
Sanitários Via GITT / Flavio Alves de Albuquerque. -
João Pessoa, 2018.

76 f. : il.

Tese (Doutorado) - UFPB/CT.

1. Aterro Sanitário. 2. Contaminação do solo. 3.
Transporte de massa num meio poroso saturado. 4. GITT.
I. Título

UFPB/BC

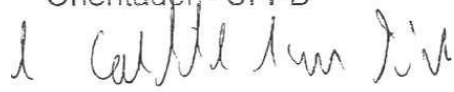
ESTUDO PROPAGAÇÃO DE CONTAMINANTE EM ATERROS SÂNTÁRIOS VIA GITT

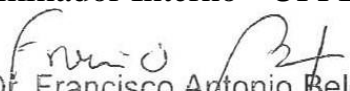
por

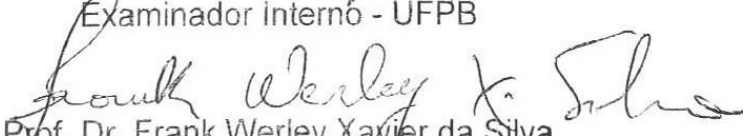
Flávio Alves de Albuquerque

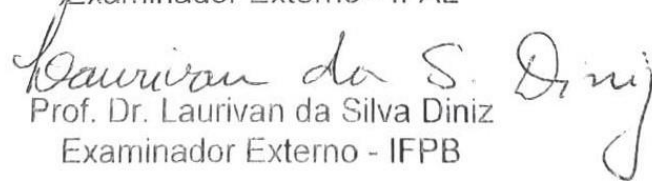
Tese aprovada em 30 de agosto de 2018


Prof. Dr. Carlos Antonio Cabral dos Santos
Orientador - UFPB


Dr. Abel Cavalcante Lima Filho
Examinador Interno - UFPB


Prof. Dr. Francisco Antonio Belo
Examinador Interno - UFPB


Prof. Dr. Frank Werley Xavier da Silva
Examinador Externo - IFAL


Prof. Dr. Laurivan da Silva Diniz
Examinador Externo - IFPB

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha esposa Andréa e aos meus filhos Flávio Henrique e Ana Beatriz, pela compreensão e incentivo nas horas mais difíceis.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter concedido ao filho de uma feirante e de um guarda municipal a oportunidade da obtenção de tão honroso título acadêmico.

Agradeço aos meus pais, Felipe de Albuquerque Melo Filho e Maria do Socorro Alves de Albuquerque, por tudo que consegui e por tudo que sou.

Agradeço ao meu orientador e amigo Prof. Dr. Carlos Antônio Cabral dos Santos pela paciência e dedicação a este trabalho.

Ao amigo Prof. Dr. Laurivan da Silva Diniz pela amizade, pelas conversas, incentivo e contribuições ao longo desse trabalho.

A todos os colegas do doutorado que de alguma forma contribuíram com esse trabalho em especial ao amigo Dhiego Veloso, cuja contribuição foi determinante para o êxito deste trabalho.

A todos os colegas professores de Matemática do IFPB, Campus João Pessoa, pela generosa atenção em concordarem com a redução na minha carga horária de trabalho, permitindo com isso, uma dedicação maior a este trabalho.

Por fim, a minha esposa Andréa Santos de Albuquerque, a meus filhos Flávio Henrique Santos de Albuquerque e Ana Beatriz Santos de Albuquerque pela compreensão de tê-los privado de minha presença, por vários momentos importantes de suas vidas e que mesmo nos momentos difíceis de nossa família me apoiaram e não me deixaram desistir.

ESTUDO DA PROPAGAÇÃO DE CONTAMINANTE EM ATERROS SANITÁRIOS VIA GITT

RESUMO

Nos dias atuais é cada vez mais frequente a preocupação com a proteção ao meio ambiente e em particular com os recursos hídricos. Deste modo, a contaminação do solo e dos lençóis freáticos provenientes dos processos de difusão e convecção da concentração de contaminantes que se acumulam com o tempo sob os aterros sanitários representa um fator extremamente importante. O presente trabalho visa estudar a propagação da concentração de contaminantes presentes no solo, a partir do vazamento contínuo e uniforme de poluentes em uma célula de armazenamento de resíduos sólidos urbanos (RSU) num aterro sanitário. A técnica da transformada integrada generalizada (GITT) é empregada para resolver o problema de transporte da espécie no aterro através do campo de concentração. As análises focam a obtenção de parâmetros para uso na prevenção da contaminação do solo e do lençol freático sob um aterro sanitário. Apresenta-se uma solução híbrida, analítico-numérica, para a equação de transporte de massa num meio poroso saturado. A GITT é usada para resolver essas equações, em regime transiente, permitindo a manipulação matemática das equações e suas condições de contorno, mesmo que sejam não lineares, para produzir sistemas de equações diferenciais ordinárias para os potenciais transformados. O modelo proposto neste trabalho é o de Ogata (1970) e Bear (1972). Um código computacional foi desenvolvido para obtenção do campo de concentração a partir de parâmetros práticos e que auxiliam na implantação de novos aterros sanitários com maior grau de proteção.

Palavras-chave: aterro sanitário, contaminação do solo, transporte de massa num meio poroso saturado, GITT.

CONTAMINANTS SPREAD OF STUDY IN LANDFILL SANITARY VIA GITT

ABSTRACT

Nowadays, the concern with protecting the environment and in particular with water resources is becoming more frequent. Thus, contamination of soil and groundwater from the diffusion and convection processes of the concentration of contaminants accumulating over time in landfills is an extremely important factor. The present work aims to study the propagation of the concentration of contaminants present in the soil, from the continuous and uniform pollutant leakage in an urban solid waste storage cell (RSU) in a sanitary landfill. The generalized integrated transform (GITT) technique is used to solve the problem of transport of the species in the landfill through the concentration field. The analyzes focus on obtaining parameters for use in the prevention of contamination of soil and groundwater under a sanitary landfill. A hybrid, analytical-numerical solution is presented for the mass transport equation in a saturated porous medium. GITT is used to solve these equations, in a transient regime, allowing the mathematical manipulation of the equations and their boundary conditions, even if they are nonlinear, to produce systems of ordinary differential equations for transformed potentials. The model proposed in this paper is that of Ogata (1970) and Bear (1972). A computational code was developed to obtain the concentration field from practical parameters and that help in the implantation of new sanitary landfills with a greater degree of protection.

Keywords: landfill sanitary, ground contamination, mass transport in a saturated porous medium, GITT

SUMÁRIO

CAPÍTULO I.....	15
INTRODUÇÃO.....	15
1.1 Estado da Arte.....	17
1.2 Motivação do Estudo	20
1.3 Objetivos.....	22
1.3.1 Objetivo Geral.....	22
1.3.2 Objetivos Específicos	22
1.4 Organização da Tese	23
 CAPÍTULO II.....	 24
FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	24
2.1 Equação do Transporte de poluentes em meios porosos	25
2.2 Processos Físicos	28
2.2.1 Advecção	28
2.2.2 Dispersão Hidrodinâmica	29
2.2.2.1 Difusão Molecular.....	29
2.2.2.2 Dispersão Mecânica.....	30
2.3 Processos Químicos	30
2.4 Obtenção da equação do modelo advecção-dispersão para o transporte de um poluente não-reativo num meio poroso saturado	32
2.5 Adimensionalização.....	39
 CAPÍTULO III	 43
3.1 Técnica De Transformada Integral Generalizada – GITT.....	43

3.2 Desenvolvimento da solução formal através da GITT para o problema específico	45
CAPÍTULO IV	58
RESULTADOS E ANÁLISES	58
4.1 Influência do Número de Peclet na Propagação da Concentração de Contaminante	60
4.2 Influência do Fator de Retardamento na Propagação da Concentração de Contaminante	63
4.3 Influência do Comprimento Adimensional na Propagação da Concentração de Contaminante.....	67
4.3 Grandezas de interesse prático.....	68
CAPÍTULO V	73
Conclusões.....	73
Sugestões para trabalhos futuros	74
REFERÊNCIAS	75

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Corte da seção de um aterro sanitário.....	24
Figura 2. Esquema Simplificado de uma célula de armazenamento de RSU.....	25
Figura 3. Mecanismos de transportes de contaminantes em superfície.....	26
Figura 4. Representação do fluxo que entra e sai de um elemento de volume.....	33
Figura 5. Esquema resumido das etapas para o uso da GITT.....	44
Figura 6. Distribuição da concentração do poluente para $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,20$	61
Figura 7. Distribuição da concentração do poluente para $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,50$	61
Figura 8. Distribuição da concentração do poluente para $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,75$	62
Figura 9. Distribuição da concentração do poluente para $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,90$	62
Figura 10. Distribuição da concentração do poluente para $Pe = 10$, $R = 1$ e $\tau = 0,02$	62
Figura 11. Distribuição da concentração do poluente para $Pe = 10$, $R = 1$ e $\tau = 0,05$...	62
Figura 12. Distribuição da concentração do poluente para $Pe = 10$, $R = 1$ e $\tau = 0,10$...	63
Figura 13. Distribuição da concentração do poluente para $Pe = 10$, $R = 1$ e $\tau = 0,20$...	63
Figura 14. Distribuição da concentração do poluente para $Pe = 2$, $R = 5$ e $\tau = 0,05$	64
Figura 15. Distribuição da concentração do poluente para $Pe = 2$, $R = 5$ e $\tau = 0,10$	64
Figura 16. Distribuição da concentração do poluente para $Pe = 2$, $R = 5$ e $\tau = 0,20$	65
Figura 17. Distribuição da concentração do poluente para $Pe = 2$, $R = 5$ e $\tau = 0,50$	65
Figura 18. Distribuição da concentração do poluente para $Pe = 10$, $R = 5$ e $\tau = 0,05$...	66
Figura 19. Distribuição da concentração do poluente para $Pe = 10$, $R = 5$ e $\tau = 0,10$...	66
Figura 20. Distribuição da concentração do poluente para $Pe = 10$, $R = 5$ e $\tau = 0,15$...	66
Figura 21. Distribuição da concentração do poluente para $Pe = 10$, $R = 5$ e $\tau = 0,20$...	66
Figura 22. Distribuição da concentração para $L^* = 10$, $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,10$	68
Figura 23. Distribuição da concentração para $L^* = 10$, $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,25$	68

Figura 24. Distribuição da concentração para $L^* = 10$, $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,50$	68
Figura 25. Distribuição da concentração para $L^* = 10$, $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,75$	68
Figura 26. Concentração Média para $L^* = 1$ e $R = 1$	69
Figura 27. Concentração Média para $L^* = 1$ e $Pe = 2$	70
Figura 28. Número de Sherwood para $L^* = 1$ e $R = 1$	71
Figura 29. Número de Sherwood para $L^* = 1$ e $Pe = 2$	72

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Comparação dos autovalores do problema auxiliar na direção Y utilizando os métodos da contagem de sinais e da transformação integral, considerando $Bi \rightarrow \infty$	50
Tabela 2. Comparação dos autovalores do problema auxiliar na direção Y utilizando os métodos da contagem de sinais e da transformação integral, considerando $Bi \rightarrow 0$	51
Tabela 3 – Convergência do campo de concentração adimensionalizado para o caso $Pe = 2$, $R = 1$ e Biot Infinito	58
Tabela 4 – Concentração adimensional em $X = 0,5$ para $Pe = 2$ e $R = 1$	60
Tabela 5 – Concentração adimensional em $X = 0,5$ para $Pe = 10$ e $R = 1$	60
Tabela 6 – Concentração adimensional em $X = 0,5$ para $Pe = 2$ e $R = 5$	63
Tabela 7 – Concentração adimensional em $X = 0,5$ para $Pe = 10$ e $R = 5$	65
Tabela 8 – Concentração adimensional em $X = 0,5$ para $L^* = 1,5$ com $Pe = 2$ e $R = 1$	67

LISTA DE SÍMBOLOS

V_a	Velocidade de Advecção
q	Velocidade de Darcy
k	Coefficiente de permeabilidade do solo na direção do fluxo
p	Pressão
g	Aceleração da gravidade
y	Coordenada vertical na direção do fluxo
F_a	Fluxo Advectivo do Solute
C	Concentração de contaminantes na fase líquida
C^*	Concentração de contaminantes na fase líquida adimensionalizada
C_F	Filtro para o campo de concentração adimensionalizada
\bar{C}_i	Transformada 1
\bar{C}_{ij}	Transformada 2
C^{**}	Transformada inversa
∇_v	Volume de vazios no solo
∇_t	Volume total do solo
D_d	Coefficiente de difusão molecular
D_m	Coefficiente de dispersão mecânica
D	Coefficiente de dispersão
F_d	Fluxo dispersivo de massa de soluto em meios porosos

S	Concentração de poluentes na fase sólida
K_d	Coeficiente de retenção
R	Fator de retardamento
t	Tempo
$\sum G_i$	Interações químicas
Pe	Número de Péclet
Bi	Número de Biot
N_i	Norma para os problemas auxiliar na direção X
K_j	Norma para os problemas auxiliar na direção Y
DQO	Demanda química de oxigênio
DBO	Demanda Biológica de oxigênio
Al	Alumínio
Fe	Ferro
Si	Silício

Letras Gregas

θ	Porosidade do solo
∇	Operador gradiente
α	Coeficiente de dispersividade
ρ	Densidade do solo
ψ_i	Autofunções do problema auxiliar na direção X
ϕ_j	Autofunções do problema auxiliar na direção Y
σ_i	Autovalores do problema auxiliar na direção X

μ_i	Autovalores do problema auxiliar na direção Y
τ	Tempo Adimensional

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A água potável é um recurso finito, que se espalha em partes desiguais pela superfície terrestre. Se por um lado, seu ciclo natural se responsabiliza por sua manutenção tornando-a um recurso renovável, por outro lado suas reservas são limitadas. O estudo do solo tornou-se tarefa fundamental para a comunidade científica, pois, apesar de 75% do nosso planeta ser composto por água, é em terra firme que se desenvolve a grande diversidade de vida e a maior parte do processo produtivo da humanidade (CAMPOS, 1998).

O solo é o principal meio de proteção das água subterrâneas, funcionando como um filtro natural capaz de imobilizar parte das impurezas nele introduzidas, a alteração de sua qualidade torna-se extremamente relevante, já que a quantidade de água disponível no planeta torna-se cada vez mais escassa. Segundo a Associação Brasileira de Normas Técnicas (2018), água subterrânea é a água que ocupa a zona saturada do subsolo ou em um sentido mais amplo, é toda a água situada abaixo da superfície do solo.

Proteger a qualidade da água potável significa proteger, também a qualidade do solo. Com o desenvolvimento industrial ocorrido na segunda metade do século XX, numa época anterior ao advento da gestão ambiental, em que não se adotavam medidas preventivas, a desenfreada exploração econômica do solo, assim como sua utilização como depósito de rejeitos, fez perceber a ideia de um desenvolvimento sustentável, proporcionando danosos impactos ambientais (ANTÔNIO, 2005).

De acordo com a Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental de São Paulo (2004), Área contaminada é o local onde há comprovadamente poluição ou contaminação, causada pela introdução de substâncias ou resíduos que nele tenham sido depositados, acumulados, armazenados, enterrados ou infiltrados, de forma planejada ou

acidental. Nas áreas contaminadas os poluentes podem-se concentrar no ar, nas águas superficiais, no solo, nos sedimentos ou nas águas subterrâneas, podendo, ainda, ser transportados, propagando-se por diferentes vias.

Com a disposição de resíduos sólidos, líquidos e gasosos em locais inapropriados no meio ambiente e em áreas do subsolo, muitos lençóis freáticos vêm sendo contaminados. A qualidade da água nesses locais vem diminuindo gradativamente. A maior parte dos poluentes no subsolo são provenientes dos usos urbanos, industriais e da agricultura, a exemplo dos resíduos industriais e dos lixões.

Conhecer a capacidade do solo para reter as impurezas presentes nos poluentes, bem como sua formação, características como a densidade e a porosidade são fundamentais para que se possa proporcionar técnicas de proteção ao solo e as águas subterrâneas, torna-se tarefa essencial para humanidade, tendo em vista a escassez dos recursos hídricos.

Com a crescente demanda ambiental, é extremamente importante a disposição dos resíduos sólidos em locais que permitam evitar ou, pelo menos diminuir, o contato desses resíduos com o meio ambiente.

Uma importante preocupação no processo de disposição desses resíduos é que os projetos de controle garantam um sistema adequado, de forma a impedir o fluxo de contaminante, por exemplo, ao longo de toda vida útil de um aterro sanitário e após seu fechamento, considerando que alguns tipos de resíduos continuam ainda com potencial tóxico bastante elevado durante centenas ou até milhares de anos. Faz-se necessário, então, que se tenha a capacidade de quantificar o montante, a distância de avanço da frente e durante quanto tempo os contaminantes provenientes de tais resíduos estarão presentes no solo (ARÊAS, 2006).

A presença de contaminantes em forma de gás ou vapor no solo se deve a vários fatores. A variedade de substâncias poluentes em um aterro sanitário é enorme, o que resulta em inúmeras formas de interação destas com o solo. Quando presentes no subsolo, os gases serão transportados, tornando-se disponíveis para serem adsorvidos às partículas do solo ou para dissolução na água do subsolo, aumentando assim o volume de água do subsolo em contato com o poluente (IGNATIUS, 1999), ou ainda serem liberados para a atmosfera, aumentando a concentração dos mesmos no local.

Dessa forma, faz-se necessário o conhecimento detalhado das condições do meio, da contaminação e do fluxo, além das propriedades dos poluentes e do solo, pois estes são

fatores que têm grande influência no transporte de substâncias. Com estas informações é possível então estimar a área da região contaminada e prever o avanço da pluma de contaminação, de maneira que se possam elaborar métodos de tratamento e de despoluição (BORGES, 1996).

São inúmeros os fenômenos que controlam o transporte de contaminantes em meios porosos, onde o contaminante considerado é a massa de alguma substância tóxica dissolvida (poluente) movendo-se com algum fluido (água) nos vazios do meio poroso (solo), seja ele saturado ou não (NOBRE, 1987).

1.1. Estado da Arte

O estudo de propagação de contaminante é de grande interesse por parte dos pesquisadores. Por isso muitos estudos têm sido feitos ao longo dos anos.

Lange et al. (2002) desenvolveram um estudo sobre a determinação em laboratório dos parâmetros de transporte de contaminantes (metais pesados) em amostras de solos da área do Aterro de Disposição de Resíduos Sólidos Urbanos do Município de Catas Altas, MG.

Carneiro (2002) trabalhou numa pesquisa onde buscou caracterizar a situação de contaminação do lençol freático em toda a região do aterro do Jockey Club de Brasília e adjacências, por meio de um programa de amostragem de qualidade da água. Foram analisados os seguintes parâmetros: pH, amônia, nitrato, cloreto, ferro total, condutividade elétrica, DQO, coliformes totais e fecais, além de análises de diversos elementos químicos por espectrometria e extração em clorofórmio. Foi realizado também uma modelagem matemática que permitiu a simulação do fluxo sub-superficial e, de forma simplificada, do transporte de contaminantes no meio poroso.

Jucá (2003) publicou um trabalho, que trata dos aspectos da destinação final dos resíduos sólidos no Brasil, onde constam a geração e o tipo de destinação final desses resíduos em cada região brasileira, a situação de vários aterros sanitários, incluindo as

técnicas adotadas para acondicionamento e tratamento de líquidos e gases provenientes desses aterros.

Antônio (2005) desenvolveu estudos sobre uma solução híbrida para problemas de migração de contaminantes no solo. Considerou-se um problema unidimensional transiente de transporte de contaminantes em um meio poroso heterogêneo, composto por várias camadas homogêneas, com propriedades constantes. Três soluções para o campo de concentração foram obtidas através de uma aproximação híbrida numérico-analítica conhecida como técnica da transformada integral generalizada (GITT), utilizando-se um caso teste previamente proposto na literatura. Os resultados obtidos mostram a relevância no uso desta técnica, pois é possível obter soluções robustas que contornem as dificuldades e os custos computacionais associados a métodos estritamente numéricos.

De Paula (2006) desenvolveu um estudo sobre as propriedades dos parâmetros de fluxo em meios porosos baseados em resultados de laboratório, utilizando a técnica fotoacústica para a detecção e medição do nível de concentração de gases (URAS 14). Esse trabalho resultou na obtenção do coeficiente de difusão dos gases oxigênio, dióxido de carbono e metano em meios porosos produzidos em condições de laboratório e o desenvolvimento de metodologias para determinação da permeabilidade com diferentes fases.

Tozetto (2008) desenvolveu estudos sobre a modelagem dos processos hidrológicos em aterros sanitários, utilizando as Fases II e III do Aterro Sanitário de Curitiba, na região Sul do Brasil, como estudo de caso. O programa computacional MODUELO2, desenvolvido pelo Grupo de Engenharia Ambiental da Universidade de Cantabria, na Espanha foi utilizado para reproduzir os processos hidrológicos que ocorrem no aterro. Os dados de entrada do modelo foram referentes à quantidade de resíduos disposta no aterro, a composição gravimétrica dos resíduos; a configuração morfológica do aterro, como topografia do terreno de fundo, geometria e plano de ocupação das células, dimensionamento da rede de drenagem de lixiviado, que são os efluentes líquidos gerados como resultante da percolação de água de chuva através dos resíduos sólidos dispostos em aterros sanitários, bem como da umidade natural desses resíduos, e os dados climatológicos do local, como precipitação, umidade relativa e temperatura do ar, radiação solar e velocidade do vento. Como conclusão foi observada que a resposta obtida demonstrou que o modelo conceitual representa a realidade do aterro sanitário de maneira adequada.

Jucá et al. (2012) propuseram uma solução alternativa para o tratamento de lixiviados de aterros de pequeno porte, este trabalho apresentou os resultados do desenvolvimento, avaliação e otimização de um sistema de tratamento, baseado na evaporação natural. Para a avaliação foram monitorados parâmetros físico-químicos e microbiológicos, tais como a DQO, DBO, cor, turbidez, condutividade, sólidos totais e coliformes. Estudou-se também a influência da radiação solar, assim como a pluviometria/evaporação. Foi constatada uma redução de aproximadamente 100% na turbidez, cor e sólidos totais. Concluiu-se assim que este sistema é eficiente e viável para aterros de pequeno porte.

Nakamura et al. (2014) fizeram uma avaliação da água no entorno do aterro sanitário do município de Visconde do Rio Branco – MG, com os objetivos específicos de: i) comparar os valores encontrados com os padrões regulamentados de enquadramento e consumo humano, verificando se há inconformidades; ii) analisar a existência de contaminação microbiológica e por elementos traço (metais pesados); iii) analisar se a disposição de resíduos sólidos urbanos está impactando as águas subsuperficiais em seu entorno, devido a problemas construtivos ou de operação, ou se foi danificado. Como conclusão foi constatada que a comparação dos dados obtidos, tanto nos poços de monitoramento quanto nas nascentes, com os parâmetros de qualidade de águas subterrâneas e para consumo humano indicam que esta água está fora dos parâmetros adequados, apresentando diversas inconformidades. A disposição de resíduos sólidos urbanos, da maneira como está sendo realizada, está impactando a qualidade das águas subterrâneas. A coleta do lixiviado, a impermeabilização e a cobertura das células podem estar sendo ineficientes, propiciando ao lixiviado atingir o solo e consequentemente as águas subterrâneas.

Conde et al. (2015) descreveram por meio de revisão bibliográfica os diversos aspectos relacionados aos aterros sanitários, dando enfoque aos processos construtivos, aos métodos de tratamentos biológicos e ao reuso dos efluentes líquidos do processo. Como conclusão foi observada que os aterros sanitários representam uma das soluções encontradas para minimizar os problemas ambientais relacionados aos resíduos sólidos urbanos, pois possuem obras de engenharia adequada para a disposição desses materiais. O conjunto de características técnicas dos aterros sanitários evita a contaminação atmosférica e não deixa, ou pelo menos minimiza, que o chorume entre em contato com o solo e fontes de água, contaminando-o, situações essas que são causadoras da disseminação de diversas

doenças. Além disso, é possível obter subprodutos que podem gerar renda como o biogás ou proporcionar água com qualidade para emprego na agricultura.

Desde o trabalho fundamental de Darcy, em meados de 1855, no qual foi desenvolvido um experimento para o escoamento num meio poroso, vários trabalhos a respeito foram produzidos e publicados.

Lima (2016) descreve o meio poroso como sendo uma matriz sólida, rígida ou com deformação desprezível, com vazios que, quando interconectados, permitem o escoamento do fluido através do meio poroso. Tendo em vista o acaso da interface fluido sólido em um meio poroso, boa parte dos trabalhos publicados a respeito se utilizam de modelos matemáticos que sejam capazes de representar propriedades tais como: permeabilidade, densidade e porosidade.

O escoamento de um fluido incompressível num meio poroso rígido saturado nos leva a um sistema de equações diferenciais parciais resultantes da lei de conservação de massa junto a lei de Darcy, que relaciona a velocidade média do escoamento ao gradiente de um potencial hidráulico através do tensor de condutividade hidráulica. Estas EDPs formam um sistema de natureza elíptica, cuja solução fornece o campo potencial e o campo de velocidade do fluido no meio poroso, também chamado de fluxo (TRISTÃO, 2013). Para tratar o modelo matemático computacionalmente, Fortuna (2000) descreve que é fundamental expressar de forma adequada as equações e a região em que elas são válidas, discretizando a região de estudo, isto é, dividindo-a em pontos que formam uma malha. Deste modo as condições de contorno, a condição inicial, as propriedades físicas do fluido e os parâmetros do escoamento caracterizam o problema a ser tratado.

1.2. Motivação do estudo

O aterro sanitário da grande João Pessoa teve seu funcionamento iniciado em agosto de 2003 com o objetivo de substituir o antigo lixão da cidade conhecido como “lixão do Roger” que funcionou por quatro décadas no bairro de mesmo nome e, pelo fato de não proporcionar um tratamento adequado ao lixo, trouxe inúmeros problemas sanitários e de saúde pública para a cidade.

Com o objetivo de minimizar os impactos produzidos pela disposição dos resíduos sólidos foi criado o primeiro aterro sanitário no estado da Paraíba, localizado fora do perímetro urbano do município de João Pessoa, no Engenho Mussuré, distrito industrial da capital paraibana, visava atender a demanda do lixo gerado pelas cidades de João Pessoa, Bayeux, Caaporã, Cabedelo, Conde, Pitimbu e Santa Rita. Este aterro ocupa uma área de cerca de 10.000 m², o que corresponde a 2,1% do município de João Pessoa que tem 210 km², utiliza um sistema para tratamento do lixo, visando diminuir o impacto ambiental que a nossa sociedade moderna gera com a produção de milhares de toneladas de resíduos sólidos.

No aterro sanitário o lixo é colocado em células de acordo com sua origem (doméstico, industrial, hospitalar...), e, antes dos resíduos serem depositados, o solo é coberto por uma camada impermeável para impedir a infiltração do chorume no terreno, ao invés disso o chorume segue para algumas "piscinas" onde passa por um tratamento de purificação. Após o lixo ser depositado, o mesmo é coberto por uma outra camada, e assim, consecutivamente até uma altura máxima de 20 metros. Além disso, cada célula possui um sistema de drenagem para retirada do gás metano que é produzido durante a decomposição, esse gás por ser muito poluente deverá ser queimado para que se transforme em gás carbônico (menos poluente).

A infiltração no solo do percolato, líquido constituído de água da chuva e chorume produzido pela degradação do lixo aterrado, num aterro sanitário pode levar diversos contaminantes para o lençol freático, causando danos irreparáveis a comunidade que utiliza o mesmo como reservatório de água para o consumo, bem como, danos a fauna e a flora do local onde se encontra o aterro. Tendo em vista o fato de não ser encontrado até o momento na literatura estudos relativos a propagação da concentração de contaminantes no solo e conseqüentemente nas águas subterrâneas sob um aterro sanitário, a partir de um vazamento em uma célula de resíduos sólidos e levando em conta a importância desse estudo para a sociedade, resolve-se desenvolver esse trabalho.

1.3 Objetivos

1.3.1. Objetivo Geral

O presente trabalho tem como objetivo principal estudar os processos físico e químico que atuam na migração do campo de concentração de contaminantes no solo abaixo de um aterro sanitário, considerando um vazamento contínuo em uma célula de resíduos sólidos urbanos (RSU). É também função do estudo simular a propagação de contaminantes no solo abaixo do aterro e analisar os parâmetros de controle para a prevenção da contaminação do lençol freático.

1.3.2. Objetivos Específicos.

- Estudar através de levantamento bibliográfico a propagação de contaminantes para os lençóis freáticos devido ao emprego de aterros sanitários;
- Modelar o problema físico, considerando as hipóteses simplificadoras necessárias;
- Estudar os processos advectivo, difusivo e adsorativo no solo dos aterros sanitários;
- Estender o uso da técnica de transformada Integral Generalizada (GITT) para a obtenção do campo de concentração;
- Desenvolver um código computacional na plataforma Mathematica para o campo de concentração através de um meio poroso sob uma célula de resíduos sólidos num aterro sanitário;
- Analisar os resultados numéricos obtidos com base na influência dos parâmetros adimensionais selecionados sobre o campo de concentração de contaminantes num aterro sanitário;
- Buscar contribuir com a melhoria e preservação dos recursos hídricos e consequentemente do meio ambiente;
- Propor novas investigações científicas que possam ampliar o modelo e dar contribuição em trabalhos futuros.

1.4. Organização da Tese.

As etapas envolvidas no desenvolvimento desta Tese foram distribuídas em seis capítulos, juntamente com alguns apêndices.

No **Capítulo 1** apresenta-se uma introdução junto com quatro subcapítulos: no primeiro temos o estado da arte mostrando as contribuições históricas acerca da temática estudada, no segundo trazemos a motivação do estudo, no terceiro temos os objetivos e no quarto temos a organização da tese.

O **Capítulo 2** consiste na formulação do problema, bem como a equação que modela o problema físico e sua adimensionalização, isto será feito em cinco subcapítulos: No primeiro será apresentada as considerações iniciais para a formulação do problema teórico baseado na equação de transporte de massa por difusão molecular, incluído os mecanismos gerais para o controle da migração de contaminantes através de um solo poroso, no segundo serão mostrados os processos físicos que envolvem o transporte de massa, no terceiro mostra-se os processos químicos, bem como as variáveis neles envolvidas, no quarto é apresentado a equação que modela o problema proposto com suas condições inicial e de contorno, e por fim, mas não menos importante, o quinto trata da adimensionalização da equação que modela o problema proposto.

O **Capítulo 3** é reservado para uma apresentação da Técnica de Transformada Integral Generalizada (GITT), bem como o desenvolvimento da solução do problema proposto.

O **Capítulo 4** trata dos resultados obtidos a partir das simulações para a distribuição da propagação do campo de concentração de contaminantes, serão apresentados e analisados os resultados das simulações através de tabelas e gráficos que mostrarão a influência dos parâmetros considerados no problema proposto.

No **Capítulo 5** serão apresentadas as conclusões do trabalho e sugestões para futuras pesquisas.

O **Capítulo 6** é destinado as Referências Bibliográficas, Apêndices e Anexos.

Capítulo II

Formulação do Problema

O problema proposto consiste no estudo e análise da migração da concentração de contaminante através de um meio poroso (solo), até chegar ao lençol Freático, a partir de um vazamento contínuo e uniforme de poluentes em uma célula de armazenamento de resíduos sólidos urbanos (RSU) num aterro sanitário, a figura 1 mostra o corte da seção transversal de um aterro sanitário.

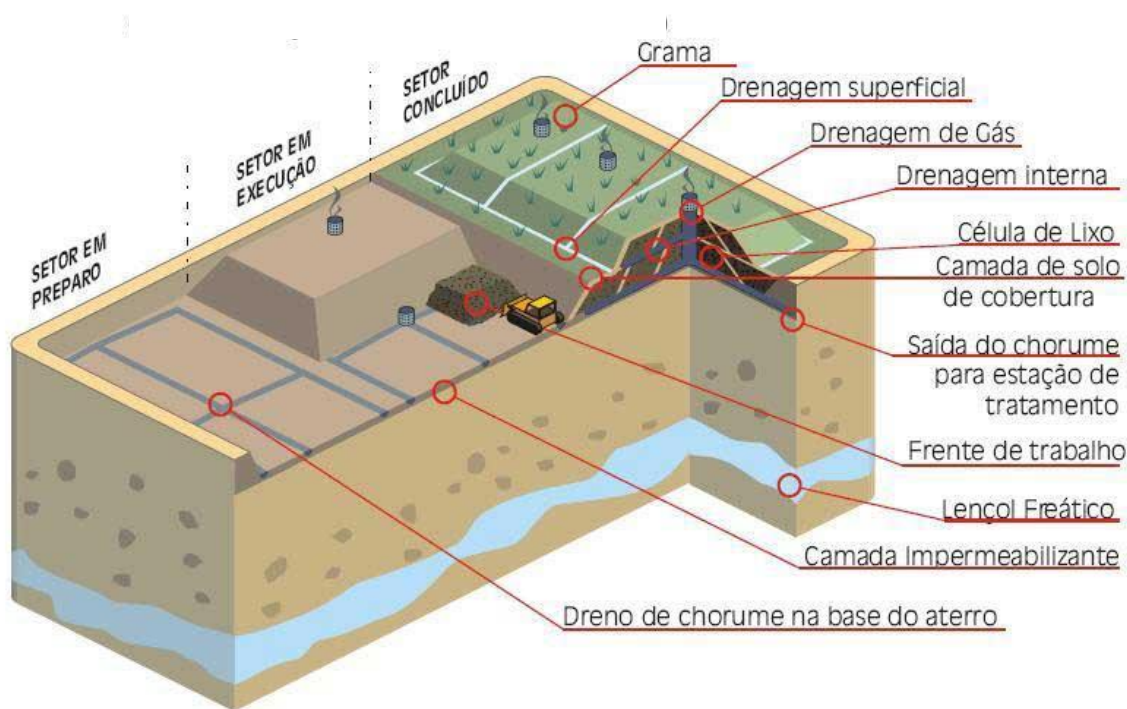


Figura 1. Corte da Seção de um aterro sanitário.

(Fonte: Manual de operação de aterros sanitários do Governo do estado da Bahia.
http://www.conder.ba.gov/manual_aterro.pdf)

A figura 2 mostra um esquema simplificado de uma célula de armazenamento de resíduos sólidos Urbanos, bem como do solo, que será nosso objeto de estudo, e do lençol freático.

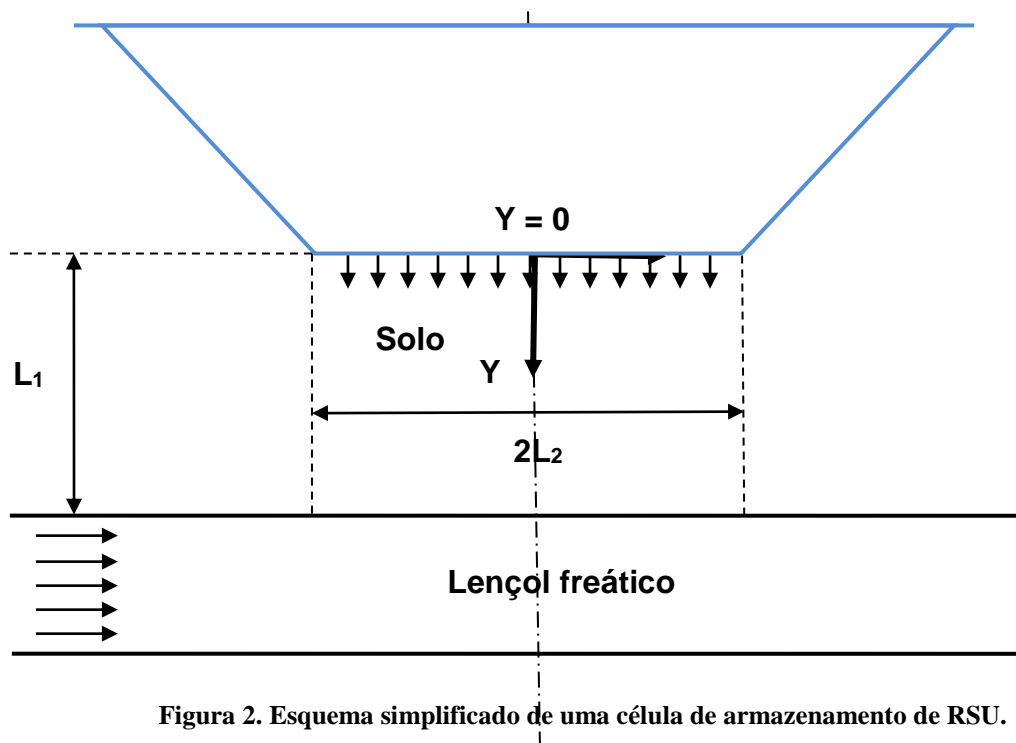


Figura 2. Esquema simplificado de uma célula de armazenamento de RSU.

A modelagem matemática do problema proposto inclui a obtenção da equação do transporte de contaminantes em um meio poroso saturado, levando em consideração algumas hipóteses simplificadoras. É feito também uma análise das condições iniciais e de contorno da equação acima descrita, bem como a adimensionalização da referida equação e de suas condições, inicial e de contorno.

2.1. Equação do Transporte de Contaminante em meios porosos

A transferência ou migração de massa em meios porosos é governada por diversos processos físicos e químicos. Essa massa que é transportada trata-se de alguma substância tóxica dissolvida (contaminante), que se desloca, pelos processos físicos de advecção, isto é, move-se junto com o fluido ou por um processo de dispersão, que é o resultado de dois processos simultâneos, difusão que é caracterizado pelo movimento molecular gerado pela

existência de um gradiente de concentração desse poluente através do meio poroso (solo), esteja ele saturado ou não e mistura mecânica que é proveniente de uma variação de velocidade dentro do meio, outros fatores que devem ser levados em conta são os processos químicos, que resultam numa aceleração ou num retardamento no transporte desse contaminante, a figura 3 mostra os mecanismos associados a migração de contaminantes no solo.

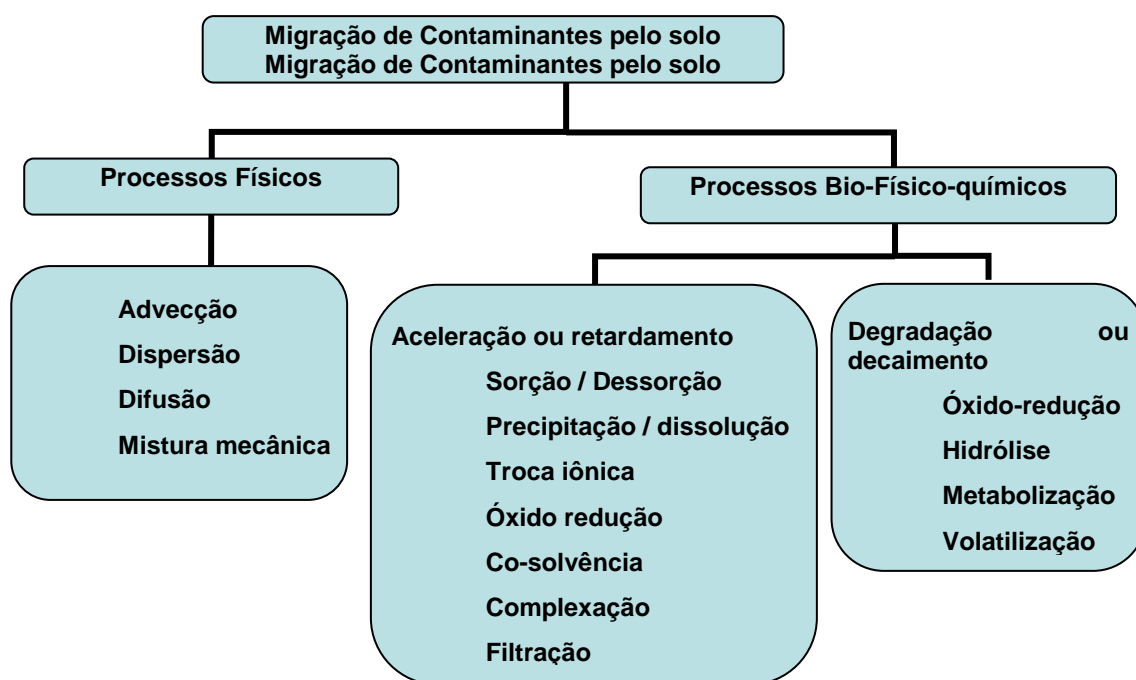


Figura 3. Mecanismos de transporte de contaminantes no solo
(Fonte: De Campos Apud Moncada, 2004)

Para se quantificar o fluxo e transporte de contaminantes no solo, bem como no lençol freático, podem ser utilizadas medidas de campo ou uma modelagem matemática.

A abordagem através de medidas de campo é mais direta e, em geral, mais precisa, pois utiliza dados experimentais coletados no ambiente a ser estudado, porém, é pouco utilizada, devido os altos custos, longos prazos envolvidos e risco de contaminação pelo fato de se usar o próprio fluido contaminado nos experimentos.

Com o surgimento e uso cada vez mais frequente pelos pesquisadores de computadores e programas que permitem a solução numérica de equações diferenciais como ferramenta de trabalho, os modelos matemáticos, os quais utilizam equações,

resolvidas por aproximações numéricas, para simular e prever respostas físico-químicas de um meio poroso sujeito a perturbações tais como a migração de contaminantes, passaram a ser desenvolvidos e utilizados em maior escala pela comunidade científica.

Os modelos matemáticos de fluxo e transporte apresentam muitas aplicações, tais como:

- Compreensão e previsão de fenômenos de fluxo e transporte de contaminantes no solo e em sistemas aquíferos;
- Definição de pontos para coleta de dados de campo e avaliação de dados existentes;
- Seleção e avaliação de alternativas que possam atenuar um local contaminado.

Vale ressaltar que os modelos matemáticos aumentam nossa base de informações, mas não produzem respostas definitivas, uma vez que fornecem uma versão simplificada de um fenômeno que geralmente é muito mais complexo na prática.

Para a modelagem do problema proposto serão utilizadas as seguintes hipóteses:

- O solo é considerado um meio poroso saturado homogêneo;
- O escoamento do contaminante através do solo é transiente e bidimensional;
- O lançamento do contaminante é contínuo;
- As propriedades físicas do meio contaminante e do solo são consideradas constantes;
- O efeito advectivo do contaminante na direção x é desprezível quando comparado com o termo difusivo;
- O fluxo de massa em y é muito maior do que em x ;
- Não há migração de contaminantes através dos contornos do eixo x ;
- O processo difusivo no solo é desprezível quando comparado a difusão no contaminante;
- Considera-se o perfil uniforme de velocidade para escoamento do contaminante.

No estudo de problemas que envolvem a previsão dos impactos de uma área de disposição de resíduos, como um aterro sanitário, por exemplo, faz-se necessário o conhecimento dos mecanismos e parâmetros de transporte de contaminantes envolvidos. Os processos físicos envolvem os fenômenos da advecção e dispersão hidrodinâmica. (ARÊAS, 2006)

Para simplificar e melhorar a análise dos dois mecanismos, estes serão feitos separadamente e posteriormente combinados no intuito de se obter a modelagem matemática mais adequada ao problema.

2.2 – Processos Físicos

2.2.1 – Advecção

Segundo (ARÊAS, 2006), a advecção é o processo pelo qual o soluto é carregado pela água em movimento. No transporte advectivo de solutos que não interagem com o meio poroso, a frente de contaminação é abrupta e move-se a uma velocidade igual à velocidade linear média (V) do fluido percolante (força diretriz), geralmente a água, sem que seu pico de concentração seja alterado.

A velocidade média de água nos poros, também chamada de velocidade de advecção, é definida por

$$V_a = \frac{q}{\theta} \quad (2.1)$$

Onde, θ é um número adimensional que representa a porosidade do solo e q é a velocidade de Darcy, que por sua vez é definida por

$$q = -k \nabla \left(\frac{p}{\rho_a g} + y \right) \quad (2.2)$$

Onde,

k é o coeficiente de permeabilidade do solo na direção do fluxo;

p é a pressão;

ρ_a é a densidade da água;

g é a aceleração da gravidade;

y é a coordenada vertical na direção do fluxo.

Desse modo o fluxo advectivo de massa de soluto (contaminante) em meios porosos é representado pela expressão:

$$F_a = V_a \theta C \quad (2.3)$$

Onde,

F_a é o fluxo Advectivo do Solute;

C é a concentração do soluto;

Considerando o solo saturado, temos que a porosidade é dada por

$$\theta = \frac{\nabla_v}{\nabla_t} \quad (2.4)$$

na qual,

∇_v representa o volume de vazios no solo

∇_t o volume total do solo.

2.2.2 – Dispersão Hidrodinâmica

O transporte por mecanismos dispersivos se caracteriza pelo espalhamento do material através do meio. Quando se trata da dispersão de moléculas, átomos ou íons sob a ação de forças de natureza intermolecular em gases, fluidos ou sólidos, o processo é denominado difusão molecular. Quando se trata da dispersão de um material devido às variações de velocidade do fluido, o processo é denominado dispersão mecânica (Lerman, 1979).

2.2.2.1 – Difusão Molecular

A forma usual de descrever a difusão molecular é dada pela expressão de Arrhenius da seguinte forma

$$D_d = Ae^{\left(-\frac{E_a}{R.T}\right)} \quad (2.5)$$

Onde,

D_d é o coeficiente de difusão molecular;

A é o fator de frequência de Arrhenius;

E_a é a média macroscópica de energia de ativação;

R é a constante dos gases;

T é a temperatura, medida em Kelvin.

2.2.2.2 – Dispersão Mecânica

A dispersão mecânica é um fenômeno ocasionado devido a variação de velocidade média do fluido nos poros devido aos seguintes fatores: viscosidade do fluido dentro do poro, diferentes geometrias do poro, flutuações das linhas de corrente em relação ao escoamento principal. Dessa forma, definimos o coeficiente de dispersão mecânica por

$$D_m = \alpha V \quad (2.6)$$

Onde,

α é o coeficiente de dispersividade;

V é a velocidade média do fluido.

Dessa forma o fluxo dispersivo de massa de soluto em meios porosos é representado pela expressão:

$$F_d = -\theta D \nabla C \quad (2.7)$$

Onde, D é coeficiente de dispersão definido por

$$D = D_d + D_m \quad (2.8)$$

2.3 – Processos Químicos

2.3.1 – Adsorção-Desorção e Troca Iônica

A adsorção é um dos fenômenos de transporte e a transferência de massa ocorre quando existe uma superfície de contato entre um sólido e um fluido (gás ou um líquido) e a concentração de determinado componente deste fluido é maior nesta superfície do que no interior do fluido, obedecendo, assim, as leis de transferência de massa como a Lei de Fick (BARIZON, 2004, p 16).

Estes processos podem ser caracterizados por isotermas que descrevem a relação de equilíbrio entre as concentrações de poluentes oriundas da sorção e dissolução para uma dada temperatura. A isoterma mais utilizada é a de Freundlich, que é definida por

$$S = K_1 C^n \quad (2.9)$$

Onde,

S é a concentração de contaminantes na fase sólida;

C é a concentração de contaminantes na fase líquida;

K_1 é uma constante empírica denominada de coeficiente de adsorção;

n é a estimativa do parâmetro de ajuste (adimensional).

Supondo $n = 1$, a constante K_1 torna-se equivalente ao coeficiente de retenção K_d , logo

$$S = K_d C \quad (2.10)$$

Um parâmetro que resulta destes processos é o fator de retardamento R , que segundo (Matos, 1995), representa uma medida da capacidade de retenção ou efeito tampão do solo para o deslocamento de determinado elemento ou composto existente em um solvente. A obtenção de R pode ser feita de acordo com (SELIM et al. 1990), utilizando a expressão

$$R = 1 + \frac{\rho K_d}{\theta} \quad (2.11)$$

Onde, ρ representa a densidade do solo.

2.3.2 – Precipitação-Dissolução

Na reação de precipitação há a formação de uma nova substância a partir da espécie química existente. Essa reação pode ocorrer na superfície dos sólidos existentes ou na solução intersticial (YOUNG et al., 1992).

A dissolução ou solubilização é a remoção de espécies químicas da fase sólida para solução intersticial. Podem ser dissolvidos, por exemplo, agentes de fixação entre partículas de solo ou elementos constituintes dos próprios argilominerais como Al, Fe e Si. Este processo libera partículas minerais ou de compostos químicos para migração através do solo e provoca erosão da estrutura dos argilominerais (ARÊAS, 2006).

2.3.3 – Óxido-Redução

As reações de oxidação e redução resultam na mudança da valência dos elementos envolvidos através do ganho ou perda de elétrons. A reação que resulta na perda de elétrons é chamada de oxidação, já o ganho de elétrons é denominado de redução.

2.3.4 – Co-solvência

Consiste na dissolução da substância em mais de um solvente. Ocorre em geral com substâncias orgânicas como resultado da introdução de certa quantidade de solvente orgânico na superfície.

2.3.5 – Complexação

A formação de complexos (também denominados Complexação ou Quelação) consiste na formação de uma ligação coordenada entre um cátion metálico e um ânion ou molécula polar, chamado ligante (THOMÉ et al, 2008).

2.3.6 – Filtração

Além de substâncias dissolvidas, a água subterrânea contaminada muitas vezes contém partículas em suspensão, que podem ser o próprio poluente, como bactérias ou pó pouco solúvel, ou conter substâncias poluentes sorvidas, como no caso de metais ou compostos orgânicos sorvidos em grãos de argila ou matéria orgânica coloidal (DOMENICO et al., 1991).

2.4 – Obtenção da equação do modelo advecção-dispersão para o transporte de um poluente não-reativo num meio poroso saturado

Essa equação é baseada na Lei da Conservação de Massa e nos princípios estabelecidos por Ogata (1970) e Bear (1972).

Para se estabelecer uma expressão matemática que represente um modelo da conservação de massa no tocante ao transporte de um contaminante, tratar-se-á do fluxo

que entra e que sai de um elemento de volume do meio poroso, como mostra a figura 4. Em coordenadas cartesianas, tanto a vazão quanto a velocidade de advecção possuem componentes nas três direções (OX, OY, OZ).

A concentração do contaminante “ C ” é definida como a massa desse contaminante por unidade da solução. A massa do contaminante por unidade de volume do meio poroso é, portanto, “ $\theta \cdot C$ ”. Para um meio homogêneo, a porosidade é constante logo,

$$\frac{\partial(\theta \cdot C)}{\partial i} = \theta \cdot \frac{\partial C}{\partial i}, \text{ com } i = x, y, z \quad (2.12)$$

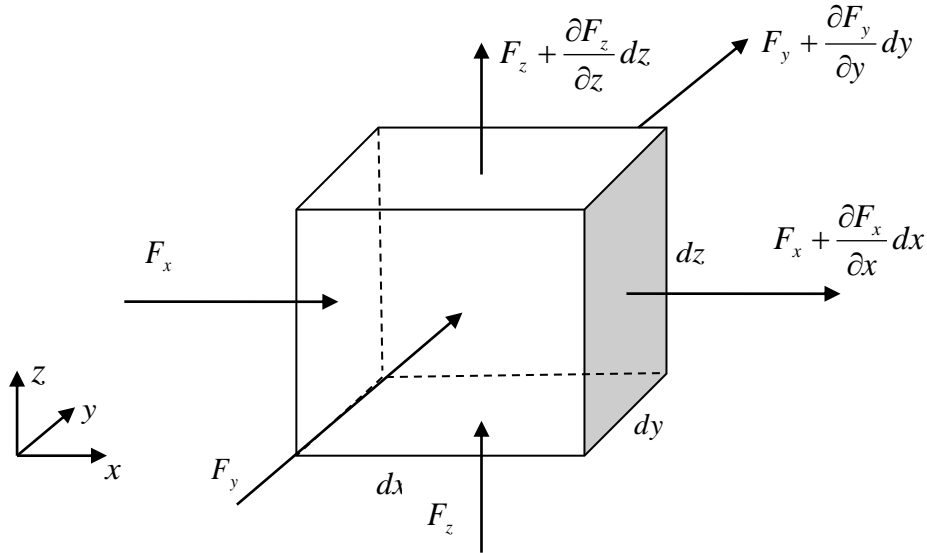


Figura 4. Representação do fluxo que entra e sai de um elemento de volume do meio poroso.

A massa do contaminante transportado na direção “ x ” pelos dois mecanismos (advecção e dispersão) de acordo com as equações (2.3) e (2.7) podem ser representadas da seguinte maneira:

$$1. \quad \text{Transporte por advecção} = V_{ax} \theta \cdot C \cdot dA \quad (2.13)$$

$$2. \quad \text{Transporte por dispersão} = -\theta \cdot D_x \frac{\partial C}{\partial x} \cdot dA \quad (2.14)$$

Onde, dA representa a área elementar do elemento cúbico por onde passa o fluxo.

Se “ F_x ” representa o total de massa do contaminante transportado na direção “x” por unidade de área e por unidade de tempo, tem-se:

$$F_x = V_{ax} \theta \cdot C - \theta D_x \frac{\partial C}{\partial x} \quad (2.15)$$

O Sinal negativo antes do termo de dispersão indica que o poluente se move na direção de zonas de menores concentrações. Analogamente, as expressões nas outras duas direções são as seguintes:

$$F_y = V_{ay} \theta \cdot C - \theta D_y \frac{\partial C}{\partial y} \quad (2.16)$$

$$F_z = V_{az} \theta \cdot C - \theta D_z \frac{\partial C}{\partial z} \quad (2.17)$$

A quantidade total de massa do contaminante que entra no elemento cúbico é:

$$F_x \cdot dydz + F_y \cdot dxdz + F_z \cdot dxdy$$

Enquanto a quantidade total de massa do contaminante que sai do elemento cúbico é:

$$\left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x} dx \right) \cdot dydz + \left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial y} dy \right) \cdot dxdz + \left(F_z + \frac{\partial F_z}{\partial z} dz \right) \cdot dxdy$$

Logo, a diferença da quantidade total de massa do contaminante que entra e sai do elemento é, portanto:

$$\begin{aligned}
& \left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x} dx \right) \cdot dydz + \left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial y} dy \right) \cdot dxdz + \left(F_z + \frac{\partial F_z}{\partial z} dz \right) \cdot dxdy - \\
& - (F_x \cdot dydz + F_y \cdot dxdz + F_z \cdot dxdy) \\
& = \frac{\partial F_x}{\partial x} dxdydz + \frac{\partial F_y}{\partial y} dydxdz + \frac{\partial F_z}{\partial z} dzdxdy \\
& = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dxdydz
\end{aligned}$$

Pelo princípio de conservação de massa, e considerando o contaminante ser não-reativo, resulta:

$$-\theta \frac{\partial C}{\partial t} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \quad (2.18)$$

Substituindo as expressões (2.15), (2.16) e (2.17) na expressão (2.18), obtém-se:

$$-\theta \frac{\partial C}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(V_{ax} \theta C - \theta D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(V_{ay} \theta C - \theta D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(V_{az} \theta C - \theta D_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \right]$$

Considerando a porosidade constante, temos:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial x} (V_{ax} C) + \frac{\partial}{\partial y} (V_{ay} C) + \frac{\partial}{\partial z} (V_{az} C) \right]$$

Num meio poroso homogêneo, os coeficientes de difusividade D_x , D_y e D_z não variam no espaço. Dessa forma, a expressão anterior torna-se

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left[D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right] - \left[\frac{\partial}{\partial x} (V_{ax} C) + \frac{\partial}{\partial y} (V_{ay} C) + \frac{\partial}{\partial z} (V_{az} C) \right] \quad (2.19)$$

Supondo a velocidade de advecção “ V_a ” permanente e uniforme, isto é, ela não varia com o tempo e espaço, a equação (2.19) torna-se:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left[D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right] - \left[V_{ax} \frac{\partial C}{\partial x} + V_{ay} \frac{\partial C}{\partial y} + V_{az} \frac{\partial C}{\partial z} \right] \quad (2.20)$$

Portanto, a equação anterior descreve o transporte de contaminante não reativo num meio poroso saturado e considerando a hipótese do escoamento ser bidimensional, a equação (2.20) torna-se:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left[D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right] - \left[V_{ax} \frac{\partial C}{\partial x} + V_{ay} \frac{\partial C}{\partial y} \right] \quad (2.21)$$

Quando ocorre uma interação química durante o processo de migração de um contaminante num meio poroso, dizemos que esse contaminante é reativo e devemos acrescentar esse fato no modelo apresentado anteriormente, portanto considerando um contaminante reativo, onde ocorram interações químicas com o meio, a equação (2.21) torna-se:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left[D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right] - \left[V_{ax} \frac{\partial C}{\partial x} + V_{ay} \frac{\partial C}{\partial y} \right] + \sum G_i \quad (2.22)$$

Onde, $\sum G_i$ indica possíveis interações químicas nas quais o contaminante é removido ou adicionado à solução. De um modo geral, este termo pode incluir qualquer tipo de processos químicos específicos envolvidos no retardamento ou aceleração da migração.

Definindo um termo $\sum G_i$ para o processo químico de adsorção, obtém-se a seguinte equação (FREEZE et al., 1979)

$$\sum G_i = -\frac{\rho}{\theta} \cdot \frac{\partial S}{\partial t} \quad (2.23)$$

Onde,

S é a concentração do contaminante na fase sólida;

ρ é a densidade do solo;

θ representa a porosidade.

Considerando que a concentração do contaminante na fase sólida só é função da concentração na solução, que por sua vez é uma função do tempo, resulta:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial C} \cdot \frac{\partial C}{\partial t} \quad (2.24)$$

Substituindo (2.24) em (2.23), temos:

$$\sum G_i = -\frac{\rho}{\theta} \cdot \frac{\partial S}{\partial C} \cdot \frac{\partial C}{\partial t} \quad (2.25)$$

Assumindo a adsorção como único processo químico de retardamento que ocorre na migração de contaminante e substituindo a equação (2.24) na equação (2.21), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \left[D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right] - \left[V_{ax} \frac{\partial C}{\partial x} + V_{ay} \frac{\partial C}{\partial y} \right] - \frac{\rho}{\theta} \cdot \frac{\partial S}{\partial C} \cdot \frac{\partial C}{\partial t} \\ \frac{\partial C}{\partial t} \left(1 + \frac{\rho}{\theta} \frac{\partial S}{\partial C} \right) &= \left[D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right] - \left[V_{ax} \frac{\partial C}{\partial x} + V_{ay} \frac{\partial C}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Considerando a relação entre a concentração do contaminante no sólido (S) e na concentração na solução (C) como linear, o coeficiente de distribuição (K_d) pode ser incorporado ao modelo como se segue (SHEPARD et al., 1980):

$$\frac{\partial C}{\partial t} \left(1 + \frac{\rho}{\theta} k_d \right) = \left[D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right] - \left[V_{ax} \frac{\partial C}{\partial x} + V_{ay} \frac{\partial C}{\partial y} \right] \quad (2.27)$$

Substituindo (2.11) na equação (2.27), e considerando que na direção X a contaminação só ocorre por difusão, temos a equação de transporte de contaminante num meio poroso saturado:

$$R \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C(x, y, t)}{\partial y^2} \right) - V_y \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial y} \quad (2.28)$$

Onde,

$C(x, y, t)$ representa a concentração do contaminante e R é o fator de retardamento do solo.

Condições de contorno do problema proposto:

Como o problema proposto é bidimensional, teremos condições de contorno nas direções X e Y.

Na direção X:

Na direção X é considerada a condição de simetria para $x = 0$, isto é, o fluxo de concentração de contaminante nessa direção para qualquer y entre 0 e L_1 será nulo. Com relação a $x = L_2$, é considerado que a concentração de contaminante foi totalmente diluída, deste modo também não se tem fluxo de concentração de contaminante, portanto

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C(0, y, t)}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq y \leq L_1 \text{ e } t > 0 \\ \frac{\partial C(L_2, y, t)}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq y \leq L_1 \text{ e } t > 0 \end{array} \right. \quad (2.29a-b)$$

Na direção Y:

Considera-se na fronteira entre a célula de armazenamento de RSU e o solo, isto é, para $y = 0$ consideremos uma concentração de contaminante constante e uniforme $C(x, 0, t) = C_0$, já na fronteira entre o solo e o lençol freático, isto é, para $y = L_1$ consideremos um fluxo de concentração de contaminante por dispersão igual à variação de concentração por convecção, logo

$$\left\{ \begin{array}{l} C(x, 0, t) = C_0, \quad 0 \leq x \leq L_2 \text{ e } t > 0 \\ -D \frac{\partial C(x, L_1, t)}{\partial y} = h_m (C - C_\infty), \quad 0 \leq x \leq L_2 \text{ e } t > 0 \end{array} \right. \quad (2.30a-b)$$

Onde, h_m representa o coeficiente de película de transferência de massa.

Como o problema em estudo é transiente, o mesmo deve satisfazer a seguinte condição inicial,

$$C(x, y, 0) = C_{inicial}, \quad 0 \leq y \leq L_1 \text{ e } 0 \leq x \leq L_2 \quad (2.31)$$

2.5 Adimensionalização

O processo de adimensionalização nos permite resolver não um só problema particular, mas uma classe de problemas que sejam definidos pelo mesmo modelo físico proposto. Além disso, podemos ter uma visualização da influência de cada parâmetro adimensional na equação de transporte de massa que modela o problema, bem como nas condições, inicial e de contorno, da referida equação. Outra vantagem da adimensionalização é a diminuição do número de parâmetros utilizados, desse modo utilizaremos neste trabalho os grupos adimensionais listados a seguir.

$$X = \frac{x}{L_2}, \quad Y = \frac{y}{L_1}, \quad \tau = \frac{Dt}{L_1^2}, \quad (2.32a-c)$$

c)

$$V^* = \frac{V_y}{V}, \quad Bi = \frac{h_m \cdot L_1}{D}, \quad Pe = \frac{V_{av} \cdot L_1}{D},$$

(2.32d-f)

$$L^* = \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2, \quad C^*(X, Y, \tau) = \frac{C(x, y, t) - C_\infty}{\Delta C}, \quad C_0^*(Y) = \frac{C_{inicial}(y) - C_\infty}{\Delta C}, \quad (2.32g-i)$$

Onde

$$\Delta C = C_0 - C_\infty$$

C_∞ representa a concentração de contaminante na interface solo/lençol freático;

$V^* = 1$, pois o escoamento será considerado nesse trabalho do tipo pistão, ou seja, $\bar{V} = V_y$.

Logo, fazendo-se uso dos parâmetros adimensionais dados pelas equações (2.32a-i) resulta:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial (\Delta C \cdot C^* + C_\infty)}{\partial \left(\frac{L_1^2 \tau}{D} \right)} = \frac{D \Delta C}{L_1^2} \cdot \frac{\partial C^*}{\partial \tau} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial(\Delta C \cdot C^* + C_\infty)}{\partial(L_2 X)} = \frac{\Delta C}{L_2} \cdot \frac{\partial C^*}{\partial X} \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial(\Delta C \cdot C^* + C_\infty)}{\partial(L_1 Y)} = \frac{\Delta C}{L_1} \cdot \frac{\partial C^*}{\partial Y} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial(L_2 X)} \frac{\partial(\Delta C \cdot C^* + C_\infty)}{\partial(L_2 X)} = \frac{\Delta C}{L_2^2} \cdot \frac{\partial^2 C^*}{\partial X^2} \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial(L_1 Y)} \frac{\partial(\Delta C \cdot C^* + C_\infty)}{\partial(L_1 Y)} = \frac{\Delta C}{L_1^2} \cdot \frac{\partial^2 C^*}{\partial Y^2} \quad (2.37)$$

Substituindo as equações (2.33), (2.34), (2.35), (2.36) e (2.37) na equação (2.28), chega-se:

$$R \cdot \frac{\Delta C \cdot D}{L_1^2} \cdot \frac{\partial C^*}{\partial \tau} = \left[D \cdot \frac{\Delta C}{L_2^2} \cdot \frac{\partial^2 C^*}{\partial X^2} + D \cdot \frac{\Delta C}{L_1^2} \cdot \frac{\partial^2 C^*}{\partial Y^2} \right] - \bar{V} \cdot \frac{\Delta C}{L_1} \cdot \frac{\partial C^*}{\partial Y} \quad (2.38)$$

Operando (2.38) por $\frac{L_1^2}{\Delta C \cdot D}$ encontra-se

$$R \frac{\partial C^*}{\partial \tau} = \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2 \frac{\partial^2 C^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial Y^2} - \frac{\bar{V} L_1}{D} \frac{\partial C^*}{\partial Y} \quad (2.39)$$

Considerando os números adimensionais (2.32f) e (2.32g) na equação (2.39), tem-se:

$$R \frac{\partial C^*(X, Y, \tau)}{\partial \tau} = L^* \frac{\partial^2 C^*(X, Y, \tau)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C^*(X, Y, \tau)}{\partial Y^2} - Pe \frac{\partial C^*(X, Y, \tau)}{\partial Y} \quad (2.40)$$

Condições de contorno adimensionais:

Na direção X:

Substituindo (2.34) e (2.32) em (2.29), resulta:

$$\begin{cases} \frac{\Delta C}{L_2} \cdot \frac{\partial C^*(0, Y, \tau)}{\partial X} = 0, & 0 \leq Y \cdot L_1 \leq L_1 \text{ e } \frac{L_1^2 \cdot \tau}{D} > 0 \\ \frac{\Delta C}{L_2} \cdot \frac{\partial C^*(1, Y, \tau)}{\partial X} = 0, & 0 \leq Y \cdot L_1 \leq L_1 \text{ e } \frac{L_1^2 \cdot \tau}{D} > 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{cases} \frac{\partial C^*(0, Y, \tau)}{\partial X} = 0, & 0 \leq Y \leq 1 \text{ e } \tau > 0 \\ \frac{\partial C^*(1, Y, \tau)}{\partial X} = 0, & 0 \leq Y \leq 1 \text{ e } \tau > 0 \end{cases} \quad (2.41a-b)$$

Na direção Y:

Substituindo (2.35) e (2.32) em (2.30), temos

$$\begin{cases} C^*(X, 0, \tau) \cdot \Delta C + C_\infty = C_0, & 0 \leq X \cdot L_2 \leq L_2 \text{ e } \frac{L_1^2 \cdot \tau}{D} > 0 \\ D \cdot \frac{\Delta C}{L_1} \cdot \frac{\partial C^*(X, 1, \tau)}{\partial Y} = h_m \cdot \Delta C \cdot C^*(X, 1, \tau), & 0 \leq X \cdot L_2 \leq L_2 \text{ e } \frac{L_1^2 \cdot \tau}{D} > 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} C^*(X, 0, \tau) = 1, \quad 0 \leq X \leq 1 \text{ e } \tau > 0 \\ \frac{\partial C^*(X, 1, \tau)}{\partial Y} + BiC^*(X, 1, \tau) = 0, \quad 0 \leq X \leq 1 \text{ e } \tau > 0 \end{array} \right. \quad (2.42\text{a-b})$$

Condição Inicial:

Substituindo (2.32h) e (2.32i) em (2.31), temos

$$C^*(X, Y, 0) \cdot \Delta C + C_\infty = C_0^*(Y) \cdot \Delta C + C_\infty, \quad 0 \leq X \leq 1 \text{ e } 0 \leq Y \leq 1$$

Logo,

$$C^*(X, Y, 0) = C_0^*(Y), \quad 0 \leq X \leq 1 \text{ e } 0 \leq Y \leq 1 \quad (2.43)$$

CAPÍTULO III

3.1 Técnica de Transformada Integral Generalizada – GITT

Com o intuito de resolver equações diferenciais parciais (EDP) que não eram resolvidas pela teoria clássica de separação de variáveis, Ozisik e Murray (1974) desenvolveram uma nova abordagem que eliminava a necessidade da EDP ser separável à priori, nasciam assim os princípios básicos da técnica de transformada integral.

Mikhailov e Ozisik (1984) publicaram o primeiro livro generalizando os formalismos da técnica de transformada integral clássica (CITT), segundo um tratamento unificado de inúmeros problemas associados à difusão de calor e massa, distribuídos em sete classes. Durante a década de oitenta, houve uma série de extensões da técnica para aplicação a diversos problemas encontrados na literatura, que eram anteriormente resolvidos por métodos chamados “puramente” numéricos tais como: diferenças finitas, elementos finitos e volumes finitos. Esses mesmos problemas resolvidos pela técnica de transformada integral, através da metodologia sistemática e controle prescrito de erro, observou-se o surgimento de uma série de vantagens, tais como: redução do tempo de processamento, aceleração na taxa de convergência, inexistência de malhas e obtenção de soluções *benchmark*.

Cotta (1993) publicou o segundo livro sobre a técnica de transformada integral, apresentando uma revisão dos formalismos clássicos, estendendo-a para a solução de problemas não-lineares e propondo mecanismos para melhorar a eficiência da solução numérica. A partir de então, convencionou-se denominar de Técnica de Transformada Integral Generalizada (*Generalized Integral Transform Technique* -GITT), à junção entre a CITT e suas extensões.

Na década posterior, a computação simbólica passou a ser utilizada como ferramenta no desenvolvimento dos formalismos analíticos da GITT. Com isso, a cansativa manipulação de fórmulas passou a ser tarefa do computador, ampliando-se cada vez mais

as fronteiras da GITT para o tratamento analítico, solução numérica e visualização gráfica de sistemas de EDPs não-lineares acopladas.

Segundo os formalismos da GITT, para solução de um problema, utiliza-se um par de fórmulas transformada-inversa e um problema auxiliar associado que traz características analíticas dos operadores do problema original. A redução de variáveis independentes, por meio de integração apropriada, permite a obtenção de um sistema de equações diferenciais ordinárias, chamado sistema transformado, que é truncado para ser resolvido analiticamente ou numericamente. Se o sistema transformado apresentar solução analítica, esta pode ser obtida por meio de computação simbólica, caso contrário, uma solução numérica deve ser obtida através de algoritmos computacionais disponíveis em várias bibliotecas de sub-rotinas científicas, tais como: IMSL, DIVIPAG, entre outras. A figura 5 a seguir ilustra o procedimento para implementação da GITT.

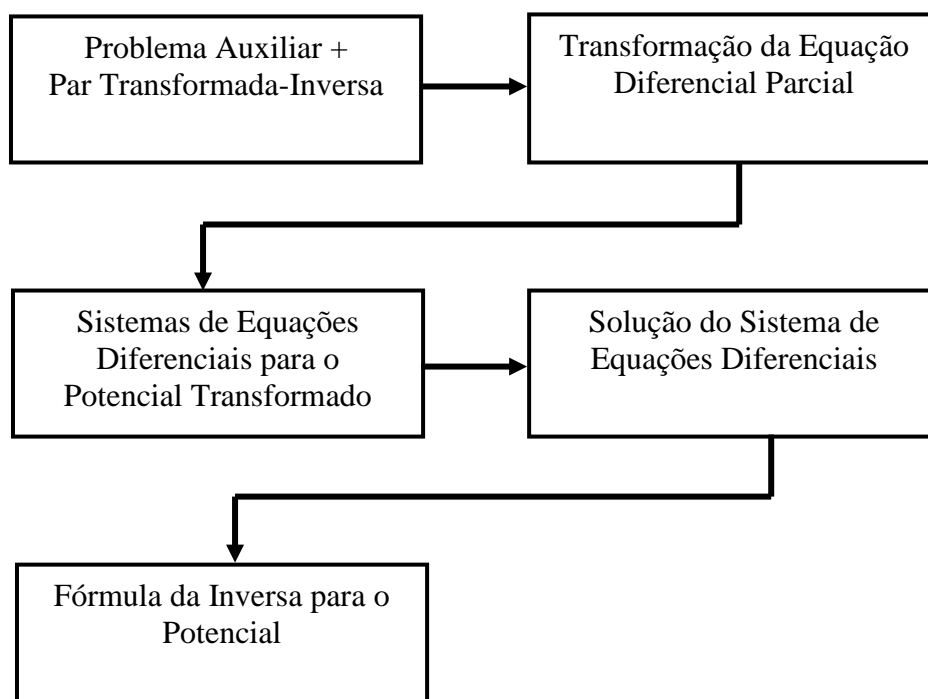


Figura 5. Esquema resumido das etapas para o uso da GITT.

3.2 Desenvolvimento da solução formal através da GITT para o problema específico

O problema que será resolvido pela técnica da transformada integral generalizada (GITT) será a equação (2.40) com suas condições de contorno (2.41), (2.42) e inicial (2.43).

Como o problema original possui uma condição de contorno não-homogênea na direção Y, dada pela equação (2.41), um filtro matemático será utilizado para que a GITT seja aplicada adequadamente, bem como melhorar a performance computacional. O filtro proposto para o campo da concentração será da forma:

$$C^*(X, Y, \tau) = C^{**}(X, Y, \tau) + C_F(Y) \quad (3.1)$$

Usando os operadores $\frac{\partial}{\partial \tau}$ e $\frac{\partial}{\partial Y}$ em (3.1), temos

$$\frac{\partial C^*(X, Y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial \tau} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial C^*(X, Y, \tau)}{\partial Y} = \frac{\partial C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial Y} + \frac{dC_F(Y)}{dY} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 C^*(X, Y, \tau)}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2 C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial Y^2} + \frac{d^2 C_F(Y)}{dY^2} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 C^*(X, Y, \tau)}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial X^2} \quad (3.5)$$

Substituindo (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5) em (2.39), temos:

$$R \frac{\partial C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial \tau} = L^* \frac{\partial^2 C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial Y^2} + \frac{d^2 C_F(Y)}{dY^2} - Pe \left(\frac{\partial C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial Y} + \frac{dC_F(Y)}{dY} \right) \quad (3.6)$$

O que nos leva a duas equações diferenciais, uma ordinária e outra parcial descritas como Problema 1 e Problema 2, respectivamente.

Problema 1

$$\frac{d^2 C_F(Y)}{dY^2} - Pe \frac{dC_F(Y)}{dY} = 0 \quad (3.7a)$$

Condições de Contorno

$$C_F(0) = 1 \quad , \quad (3.7b)$$

$$\frac{dC_F(1)}{dY} + Bi C_F(1) = 0 \quad (3.7c)$$

Para resolver a equação diferencial (3.7a), temos que inicialmente resolver a equação característica associada, logo

$$\lambda^2 - Pe\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = Pe \end{cases}$$

Como a equação característica apresenta duas raízes reais e distintas (3.7a) tem solução geral na forma

$$C_F(Y) = c_1 e^{\lambda_1 Y} + c_2 e^{\lambda_2 Y}$$

logo

$$C_F(Y) = c_1 + c_2 e^{PeY}$$

Usando as condições de contorno (3.7b-c), temos

$$c_1 = \frac{-Pe.e^{Pe} - Bi.e^{Pe}}{Bi - Pe.e^{Pe} - Bi.e^{Pe}}$$

$$c_2 = \frac{Bi.}{Bi - Pe.e^{Pe} - Bi.e^{Pe}}$$

Portanto a solução analítica da equação (3.7a) é dada por

$$C_F(Y) = \frac{e^{Pe}(Pe + Bi) - Bi.e^{Pe.Y}}{e^{Pe}(Pe + Bi) - Bi} \quad (3.7d)$$

Problema 2

$$R \frac{\partial C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial \tau} = L^* \frac{\partial^2 C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial Y^2} - Pe \frac{\partial C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial Y} \quad (3.8a)$$

Condições de Contorno:

Na Direção X:

$$\frac{\partial C^{**}(0, Y, \tau)}{\partial X} = 0, \quad \tau \geq 0 \text{ e } 0 \leq Y \leq 1 \quad (3.8b)$$

$$\frac{\partial C^{**}(1, Y, \tau)}{\partial X} = 0, \quad \tau \geq 0 \text{ e } 0 \leq Y \leq 1 \quad (3.8c)$$

Na Direção Y:

$$C^{**}(X, 0, \tau) = 0, \quad \tau \geq 0 \text{ e } 0 \leq X \leq 1 \quad (3.8d)$$

$$\frac{\partial C^{**}(X, 1, \tau)}{\partial Y} + BiC^{**}(X, 1, \tau) = 0, \quad \tau \geq 0 \text{ e } 0 \leq X \leq 1 \quad (3.8e)$$

Condição Inicial:

$$C^{**}(X, Y, \tau) = C_0^*(Y) - C_F(Y), \quad \tau = 0 ; 0 \leq X \leq 1 \text{ e } 0 \leq Y \leq 1 \quad (3.8f)$$

Como mencionado anteriormente, a GITT será aplicada em (3.8a), para se obter a sua solução. De posse da mesma e em conjunto com a solução da equação (3.7a) usaremos a equação (3.1) para encontrar a solução geral do problema físico proposto.

Seguindo a metodologia da técnica da transformada integral generalizada (GITT) consideremos os seguintes problemas auxiliares de autovalores associados às respectivas autofunções:

Problema auxiliar de autovalor na Direção X

O problema auxiliar para o campo da concentração, pelo fato do problema original ser descrito por um sistema de equações diferenciais de segunda ordem, recai sobre o problema típico de Sturm-Liouville.

O problema auxiliar escolhido, na direção X, para a determinação do campo da concentração é escrito da seguinte forma:

$$\frac{d^2 \psi_i(\sigma_i, X)}{dX^2} + \frac{\sigma_i^2}{L^*} \psi_i(\sigma_i, X) = 0 \quad ; \quad 0 \leq X \leq 1 \quad (3.9a)$$

$$\frac{d\psi_i(\sigma_i, X)}{dX} = 0 \quad ; \quad X = 0 \text{ e } \sigma_i > 0 \quad (3.9b)$$

$$\frac{d\psi_i(\sigma_i, X)}{dX} = 0 \quad ; \quad X = 1 \quad \text{e} \quad \sigma_i > 0 \quad (3.9c)$$

Os autovalores (σ_i), as autofunções, $\psi_i(\sigma_i, X)$, e as normas (N_i), para o problema de autovalor supracitado, podem ser desenvolvidos analiticamente. Após manipulações matemáticas, obtém-se que:

$$\sigma_i = (i-1)\pi\sqrt{L^*} \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.9d)$$

$$\psi_i(\sigma_i, X) = \cos\left(\frac{\sigma_i}{\sqrt{L^*}} X\right) \quad (3.9e)$$

$$N_i = \int_0^1 \frac{1}{L^*} \psi_i^2(\sigma_i, X) dx \quad (3.9f)$$

Como o primeiro autovalor é zero, usamos a regra de L'hôpital para determinar a norma para esse autovalor, logo $N_1 = 1$. Para os demais autovalores a norma é:

$$N_i = \frac{1}{2}; \quad i = 2, 3, 4, \dots$$

No presente trabalho utiliza-se o método da contagem de sinais para a determinação dos autovalores (σ_i), das autofunções, $\psi_i(\sigma_i, X)$, e das normas (N_i). O método da contagem de sinais foi implementado no código computacional na plataforma Fortran PS para a solução do problema de autovalor associado.

Problema auxiliar de autovalor na direção Y

O problema auxiliar escolhido para a determinação do campo da concentração, na direção Y, é escrito da seguinte forma:

$$\frac{d}{dY} \left(e^{-Pe.Y} \cdot \frac{d\varphi_j(\mu_j, Y)}{dY} \right) + \mu_j^2 e^{-Pe.Y} \varphi_j(\mu_j, Y) = 0, \quad 0 \leq Y \leq 1 \quad (3.10a)$$

$$\varphi_j(\mu_j, Y) = 0 \quad ; \quad Y = 0 \quad \text{e} \quad \mu_j > 0 \quad (3.10b)$$

$$\frac{d\varphi_j(\mu_j, Y)}{dY} + Bi \cdot \varphi_j(\mu_j, Y) = 0 \quad ; \quad Y = 1 \quad \text{e} \quad \mu_j > 0 \quad (3.10c)$$

O problema auxiliar proposto foi solucionado utilizando duas metodologias consagradas para a resolução de problemas de autovalores com estrutura no problema típico de Sturm-Liouville: Método da Contagem de Sinal (Mikhailov & Vulchanov, 1983) e o Método da Transformação Integral (Cotta, 1993). O método da contagem de sinais foi implementado por meio de um código computacional na plataforma *FORTRAN* e o método da transformação integral foi implementado no software *MATHEMATICA*. Uma comparação entre os métodos pode ser avaliada através das tabelas 1 e 2, que analisam os autovalores (μ_j), considerando três valores distintos para o número de Peclet e dois valores distintos para o número de Biot. Através das tabelas 1 e 2 pode-se perceber uma boa concordância entre os resultados obtidos, validando os resultados encontrados para o problema auxiliar proposto no presente trabalho.

Tabela 1 – Comparação dos autovalores do problema auxiliar na direção Y utilizando os métodos da contagem de sinais e da transformação integral, considerando $Bi \rightarrow \infty$

Autovalores S	Pe = 1		Pe = 10		Pe = 15	
	Contagem de Sinais	Transformação Integral	Contagem de Sinais	Transformação Integral	Contagem de Sinais	Transformação Integral
1º Autovalor	3.1811	3.18113716	5.9050	5.90505	8.1314	8.13142348
2º Autovalor	6.3030	6.30305915	8.0298	8.02985	9.7841	9.78418446
3º Autovalor	9.4380	9.43804595	10.669	10.669	12.045	12.04492224
4º Autovalor	12.576	12.57633690	13.525	13.5246	14.634	14.63455051
5º Autovalor	15.716	15.71594470	16.485	16.4846	17.407	17.40682383
6º Autovalor	18.856	18.85622427	19.501	19.5015	20.287	20.28701216
7º Autovalor	21.997	21.99687199	22.552	22.5524	23.235	23.23490467
8º Autovalor	25.138	25.13777294	25.625	25.6253	26.228	26.22790369
9º Autovalor	28.279	28.27881456	28.713	28.7131	29.252	29.25229588
10º Autovalor	31.420	31.41999505	31.811	31.8114	32.299	32.29934184

Tabela 2 – Comparação dos autovalores do problema auxiliar na direção Y utilizando os métodos da contagem de sinais e da transformação integral, considerando $Bi \rightarrow 0$

Autovalores	Pe = 1		Pe = 10		Pe = 15	
	Contagem de Sinais	Transformação Integral	Contagem de Sinais	Transformação Integral	Contagem de Sinais	Transformação Integral
1º Autovalor	1.9034	1.90344268	5.6606	5.66056304	8.0007	8.00072026
2º Autovalor	4.8417	4.84173162	7.3993	7.39933782	9.3831	9.38314999
3º Autovalor	7.9328	7.93283210	9.7680	9.76807199	11.390	11.39047515
4º Autovalor	11.052	11.05215545	12.456	12.45623604	13.789	13.78886070
5º Autovalor	14.181	14.18126170	15.309	15.30943464	16.424	16.42395513
6º Autovalor	17.315	17.31487888	18.254	18.25440312	19.205	19.20510792
7º Autovalor	20.451	20.45093691	21.254	21.25439503	22.080	22.07990083
8º Autovalor	23.588	23.58847223	24.289	24.28957684	25.017	25.01727950
9º Autovalor	26.727	26.72695573	27.348	27.34846418	27.998	27.99812730
10º Autovalor	29.866	29.86610620	30.424	30.42403368	31.010	31.01026217

A partir dos resultados encontrados nas tabelas 1 e 2, no presente trabalho utiliza-se do método da transformação integral para a determinação dos autovalores (μ_j), das autofunções, $\varphi_j(\mu_j, Y)$, e das normas (K_j).

Transformação Integral do campo da concentração

Seguindo a metodologia usual da GITT, foi definido o par transformada-inversa com a finalidade de reduzir o problema original, que se trata de uma equação diferencial parcial, num sistema infinito e acoplado de equações diferenciais ordinárias. Num segundo momento, a fórmula da inversa pode ser utilizada para obtenção da solução do problema original. O par transformada integral definido para este problema é dado por:

$$\bar{C}_i(Y, \tau) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \frac{1}{L^*} \psi_i(\sigma_i, X) C^{**}(X, Y, \tau) dX, \quad \text{Transformada 1} \quad (3.11a)$$

$$\bar{C}_{ij}(\tau) = \frac{1}{K_j^{1/2}} \int_0^1 e^{-Pe \cdot Y} \varphi_j(\mu_j, Y) \bar{C}_i(Y, \tau) dY, \quad \text{Transformada 2} \quad (3.11b)$$

$$C^{**}(X, Y, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\psi_i(\sigma_i, X) \varphi_j(\mu_j, Y) \bar{C}_{ij}(\tau)}{N_i^{1/2} K_j^{1/2}} \quad \text{Inversa} \quad (3.11c)$$

Operando a equação (3.8a) por $\frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \psi_i(\sigma_i, X) dX$, permite encontrar:

$$\begin{aligned} R \int_0^1 \frac{\psi_i(\sigma_i, X)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial \tau} dX &= L^* \int_0^1 \frac{\psi_i(\sigma_i, X)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial^2 C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial X^2} dX + \\ + \int_0^1 \frac{\psi_i(\sigma_i, X)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial^2 C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial Y^2} dX &- Pe \int_0^1 \frac{\psi_i(\sigma_i, X)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial Y} dX \end{aligned} \quad (3.12a)$$

Usando a definição da transformada 1 (Eq. 3.11a), segue que:

$$R \frac{\partial \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial \tau} = L^* \int_0^1 \frac{\psi_i(\sigma_i, X)}{N_i^{1/2}} \frac{\partial^2 C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial X^2} dX + \frac{\partial^2 \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial Y^2} - Pe \frac{\partial \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial Y} \quad (3.12b)$$

Por outro lado, operando a equação (3.9a) do problema auxiliar na direção X por

$$\int_0^1 L^* \cdot \frac{C^{**}(X, Y, \tau)}{N_i^{1/2}} dX, \text{ e usando a definição da transformada 1, resulta:}$$

$$\int_0^1 L^* \cdot \frac{C^{**}(X, Y, \tau)}{N_i^{1/2}} \cdot \frac{\partial^2 \psi_i(\sigma_i, X)}{\partial X^2} dX + \sigma_i^2 L^* \bar{C}_i(Y, \tau) = 0 \quad (3.12c)$$

Somando as equações (3.12b) e (3.12c), temos que:

$$\begin{aligned} R \frac{\partial \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial \tau} &= -\sigma_i^2 L^* \bar{C}_i(Y, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial Y^2} - Pe \frac{\partial \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial Y} + \\ + \frac{L^*}{N_i^{1/2}} &\left\{ \int_0^1 \left[\psi_i(\sigma_i, X) \frac{\partial^2 C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial X^2} - C^{**}(X, Y, \tau) \frac{\partial^2 \psi_i(\sigma_i, X)}{\partial X^2} \right] dX \right\} \end{aligned} \quad (3.12d)$$

Resolvendo a integral que aparece na equação (3.12d), segue que:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \left[\psi_i(\sigma_i, X) \frac{\partial^2 C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial X^2} - C^{**}(X, Y, \tau) \frac{\partial^2 \psi_i(\sigma_i, X)}{\partial X^2} \right] dX = \\
 & = \int_0^1 \psi_i(\sigma_i, X) \frac{\partial^2 C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial X^2} dX - \int_0^1 C^{**}(X, Y, \tau) \frac{\partial^2 \psi_i(\sigma_i, X)}{\partial X^2} dX = \\
 & = \psi_i(\sigma_i, X) \frac{\partial C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial X} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial X} \frac{\partial \psi_i(\sigma_i, X)}{\partial X} dX + \\
 & - \left(C^{**}(X, Y, \tau) \frac{\partial \psi_i(\sigma_i, X)}{\partial X} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial X} \frac{\partial \psi_i(\sigma_i, X)}{\partial X} dX \right) \quad (3.12e)
 \end{aligned}$$

Organizando os termos, utilizando que $\frac{\partial C^{**}(0, Y, \tau)}{\partial X} = 0$ (Eq. 3.8b), $\frac{\partial C^{**}(1, Y, \tau)}{\partial X} = 0$ (Eq. 3.8c), $\frac{\partial \psi_i(\sigma_i, X)}{\partial X} = 0$ (Eq. 3.9b) e $\frac{\partial \psi_i(\sigma_i, X)}{\partial X} = 0$ (Eq. 3.9c), resta que a equação (3.12e) é:

$$\int_0^1 \left[\psi_i(\sigma_i, X) \frac{\partial^2 C^{**}(X, Y, \tau)}{\partial X^2} - C^{**}(X, Y, \tau) \frac{\partial^2 \psi_i(\sigma_i, X)}{\partial X^2} \right] dX = 0$$

Logo, a equação (3.12d) torna-se:

$$R \frac{\partial \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial \tau} = -\sigma_i^2 L^* \bar{C}_i(Y, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial Y^2} - Pe \frac{\partial \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial Y} \quad (3.12f)$$

Operando a equação (3.12f) por $\frac{1}{K_j^{1/2}} \int_0^1 e^{-Pe \cdot Y} \cdot \Psi_j(\mu_j, Y) dY$, permite encontrar:

$$\begin{aligned}
R \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{K_j^{1/2}} \int_0^1 e^{-Pe.Y} \Psi_j(\mu_j, Y) \bar{C}_i(Y, \tau) dY \right] &= -\sigma_i^2 \frac{1}{K_j^{1/2}} \int_0^1 e^{-Pe.Y} \Psi_j(\mu_j, Y) \bar{C}_i(Y, \tau) dY \\
&+ \frac{1}{K_j^{1/2}} \int_0^1 e^{-Pe.Y} \Psi_j(\mu_j, Y) \frac{\partial^2 \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial Y^2} dY - \frac{1}{K_j^{1/2}} \int_0^1 Pe e^{-Pe.Y} \Psi_j(\mu_j, Y) \frac{\partial \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial Y} dY
\end{aligned} \quad (3.12g)$$

Usando a definição da transformada 2 (Eq. 3.11b) na equação (3.12g) e organizando os termos, segue que:

$$R \frac{\partial \bar{C}_{ij}(\tau)}{\partial \tau} = -\sigma_i^2 \bar{C}_{ij}(\tau) + \frac{1}{K_j^{1/2}} \int_0^1 \left\{ \Psi_j(\mu_j, Y) \left[e^{-Pe.Y} \frac{\partial^2 \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial Y^2} - Pe e^{-Pe.Y} \frac{\partial \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial Y} \right] \right\} dY \quad (3.12h)$$

Usando a definição da derivada do produto, pode-se escrever a equação anterior como:

$$R \frac{\partial \bar{C}_{ij}(\tau)}{\partial \tau} = -\sigma_i^2 \bar{C}_{ij}(\tau) + \frac{1}{K_j^{1/2}} \int_0^1 \left\{ \Psi_j(\mu_j, Y) \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(e^{-Pe.Y} \frac{\partial \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial Y} \right) \right] \right\} dY \quad (3.12i)$$

Por outro lado, operando a equação (3.10a) do problema auxiliar na direção Y por $\int_0^1 \frac{\bar{C}_i(Y, \tau)}{K_j^{1/2}} dY$, e usando a definição da transformada 2, segue que:

$$\frac{1}{K_j^{1/2}} \int_0^1 \bar{C}_i(Y, \tau) \frac{\partial}{\partial Y} \left(e^{-Pe.Y} \frac{\partial \Psi_j(\mu_j, Y)}{\partial Y} \right) dY + \mu_j^2 \bar{C}_{ij}(\tau) = 0 \quad (3.12j)$$

Somando as equações (3.12i) e (3.12j), resulta:

$$\begin{aligned}
R \frac{\partial \bar{C}_{ij}(\tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{K_j^{1/2}} \int_0^1 \bar{C}_i(Y, \tau) \frac{\partial}{\partial Y} \left(e^{-Pe.Y} \frac{\partial \Psi_j(\mu_j, Y)}{\partial Y} \right) dY + \mu_j^2 \bar{C}_{ij}(\tau) = \\
-\sigma_i^2 \bar{C}_{ij}(\tau) + \frac{1}{K_j^{1/2}} \int_0^1 \left\{ \Psi_j(\mu_j, Y) \frac{\partial}{\partial Y} \left(e^{-Pe.Y} \frac{\partial \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial Y} \right) \right\} dY
\end{aligned} \quad (3.12k)$$

Organizando os termos, segue que:

$$R \frac{\partial \bar{C}_{ij}(\tau)}{\partial \tau} = -(\mu_j^2 + \sigma_i^2) \bar{C}_{ij}(\tau) + \frac{1}{K_j^{1/2}} \int_0^1 \left\{ \Psi_j(\mu_j, Y) \frac{\partial}{\partial Y} \left(e^{-Pe.Y} \cdot \frac{\partial \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial Y} \right) - \bar{C}_i(Y, \tau) \frac{\partial}{\partial Y} \left(e^{-Pe.Y} \cdot \frac{\partial \Psi_j(\mu_j, Y)}{\partial Y} \right) \right\} dY \quad (3.12l)$$

Resolvendo a primeira integral que aparece na equação (3.12l), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_j^{1/2}} \int_0^1 \left\{ \Psi_j(\mu_j, Y) \frac{\partial}{\partial Y} \left(e^{-Pe.Y} \cdot \frac{\partial \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial Y} \right) - \bar{C}_i(Y, \tau) \frac{\partial}{\partial Y} \left(e^{-Pe.Y} \cdot \frac{\partial \Psi_j(\mu_j, Y)}{\partial Y} \right) \right\} dY = \\ = \frac{1}{K_j^{1/2}} \left(\Psi_j(\mu_j, Y) e^{-Pe.Y} \cdot \frac{\partial \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial Y} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-Pe.Y} \cdot \frac{\partial \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial Y} \frac{\partial \Psi_j(\mu_j, Y)}{\partial Y} dY \right) + \\ - \frac{1}{K_j^{1/2}} \left(\bar{C}_i(Y, \tau) e^{-Pe.Y} \cdot \frac{\partial \Psi_j(\mu_j, Y)}{\partial Y} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-Pe.Y} \cdot \frac{\partial \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial Y} \frac{\partial \Psi_j(\mu_j, Y)}{\partial Y} dY \right) \end{aligned} \quad (3.12m)$$

Organizando os termos, utilizando que $C^{**}(X, 0, \tau) = 0$ (Eq. 3.8d),

$$\frac{\partial C^{**}(X, 1, \tau)}{\partial Y} + Bi C^{**}(X, 1, \tau) = 0 \quad (\text{Eq. 3.8e}), \quad \Psi_j(\mu_j, 0) = 0 \quad (\text{Eq. 3.10b}) \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial \Psi_j(\mu_j, 1)}{\partial Y} + Bi \cdot \Psi_j(\mu_j, 1) = 0 \quad (\text{Eq. 3.10c}), \text{ resta que:}$$

$$\frac{1}{K_j^{1/2}} \int_0^1 \left\{ \Psi_j(\mu_j, Y) \frac{\partial}{\partial Y} \left(e^{-Pe.Y} \cdot \frac{\partial \bar{C}_i(Y, \tau)}{\partial Y} \right) - \bar{C}_i(Y, \tau) \frac{\partial}{\partial Y} \left(e^{-Pe.Y} \cdot \frac{\partial \Psi_j(\mu_j, Y)}{\partial Y} \right) \right\} dY = 0$$

Logo, a equação (3.12l) torna-se:

$$R \frac{d \bar{C}_{ij}(\tau)}{d \tau} = -(\mu_j^2 + \sigma_i^2) \bar{C}_{ij}(\tau) \quad (3.12n)$$

A equação (3.12n) possui solução analítica clássica, dada por:

$$\bar{C}_{ij}(\tau) = \bar{C}_{ij}(0) \cdot e^{-\frac{(\mu_j^2 + \sigma_i^2)}{R} \tau} \quad (3.12o)$$

TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DA CONDIÇÃO INICIAL

Operando a equação (3.8f) por $\frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \frac{1}{L^*} \Psi_i(\sigma_i, X) dX$, resulta:

$$\frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \frac{1}{L^*} \Psi_i(\sigma_i, X) C^{**}(X, Y, 0) dX = [C_0^*(Y) - C_F(Y)] \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \frac{1}{L^*} \Psi_i(\sigma_i, X) dX \quad (3.13)$$

Usando a definição da transformada 1 (Eq. 3.11a), segue que:

$$\bar{C}_i(Y, 0) = [C_0^*(Y) - C_F(Y)] \cdot \bar{f}_i \quad (3.14)$$

Tal que:

$$\bar{f}_i = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \frac{1}{L^*} \phi_i(\sigma_i, X) dX \quad (3.14.b)$$

Operando a equação (3.14) por $\frac{1}{K_j^{1/2}} \int_0^1 e^{-Pe.Y} \cdot \Psi_j(\mu_j, Y) dY$, permite encontrar:

$$\frac{1}{K_j^{1/2}} \int_0^1 e^{-Pe.Y} \cdot \Psi_j(\mu_j, Y) \bar{C}_i(Y, 0) dY = \bar{f}_i \cdot \frac{1}{K_j^{1/2}} \int_0^1 [C_0^* - C_F(Y)] e^{-Pe.Y} \cdot \Psi_j(\mu_j, Y) dY \quad (3.15)$$

Usando a definição da transformada 2 (Eq. 3.11b), segue que:

$$\bar{C}_{ij}(0) = \bar{f}_i \cdot \bar{g}_j \quad (3.16a)$$

Tal que:

$$\bar{g}_j = \frac{1}{K_j^{1/2}} \int_0^1 [C_0^* - C_F(Y)] e^{-Pe.Y} \Psi_j(\mu_j, Y) dY \quad (3.16b)$$

CÁLCULO DO POTENCIAL DE CONCENTRAÇÃO TRANSFORMADO

Aplicando a condição inicial (Eq. 3.16a) na equação (3.12o), verifica-se que:

$$\bar{C}_{ij}(\tau) = \bar{f}_i \cdot \bar{g}_j \cdot e^{-\frac{(\mu_j^2 + \sigma_i^2)}{R} \tau} \quad (3.17)$$

Onde os coeficientes \bar{f}_i e \bar{g}_j podem ser calculados através das definições apresentadas nas equações (3.14b) e (3.16b), respectivamente.

CÁLCULO DO CAMPO DE CONCENTRAÇÃO

A partir da solução encontrada na equação (3.17), utilizou-se a fórmula da inversa (eq. 3.11c) para encontrar a solução de $C^{**}(X, Y, \tau)$. De posse da mesma, finalizou-se o estudo usando as equações (3.1) e (3.7d) para encontrar a solução geral do problema físico proposto, que diz respeito ao cálculo de $C^*(X, Y, \tau)$. Procedendo como descrito, conclui-se que:

$$C^*(X, Y, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(\sigma_i, X) \Psi_j(\mu_j, Y) \bar{f}_i \bar{g}_j \cdot e^{-\frac{(\mu_j^2 + \sigma_i^2)}{R} \tau}}{N_i^{1/2} K_j^{1/2}} + \frac{e^{Pe} (Pe + Bi) - Bi \cdot e^{Pe.Y}}{e^{Pe} (Pe + Bi) - Bi} \quad (3.18)$$

Capítulo IV

4. Resultados e Análise

Uma vez resolvido o modelo matemático proposto e usada a implementação computacional, são apresentados e analisados os resultados, nas formas de tabelas e gráficos, a partir das simulações feitas. São consideradas as variações dos parâmetros adimensionais no modelo utilizado, a partir dos quais serão feitas análises a respeito da influência dos parâmetros de interesses práticos, tais como: concentração média, número de Sherwood e o fluxo de massa. Em seguida apresentaremos a conclusão do trabalho e as sugestões para trabalhos futuros.

As simulações foram implementadas no software *MATHEMATICA 9.0* para obtenção dos campos desejados. Os problemas auxiliares foram resolvidos para 100 autovalores e autofunções. Este número foi identificado após testes de convergência para a quinta casa decimal.

Tabela 3 – Convergência do campo de concentração adimensionalizado para o caso $Pe = 2$, $R = 1$ e Biot Infinito

$C(X, Y, \tau)$	<i>Número de autovalores</i>				
	20	40	60	80	100
$C^*(0; 0,2; 0,20)$	0,8757096	0,8757126	0,8757129	0,8757129	0,875713
$C^*(0; 0,4; 0,20)$	0,7148233	0,7148227	0,7148226	0,7148225	0,7148226
$C^*(0; 0,6; 0,20)$	0,5230395	0,5230356	0,5230351	0,5230349	0,5230351
$C^*(0; 0,8; 0,20)$	0,2954933	0,2954826	0,2954814	0,2954811	0,2954811

$C(X, Y, \tau)$	<i>Número de autovalores</i>				
	120	140	160	180	200
$C^*(0; 0,2; 0,20)$	0,875713	0,875713	0,875713	0,875713	0,875713
$C^*(0; 0,4; 0,20)$	0,7148226	0,7148226	0,714823	0,714823	0,7148226
$C^*(0; 0,6; 0,20)$	0,523035	0,523035	0,523035	0,523035	0,523035
$C^*(0; 0,8; 0,20)$	0,2954811	0,2954811	0,295481	0,295481	0,295481

Na tabela 3, pode ser observado que para um número de autovalor superior a 100 dos resultados são redundantes, atendendo ao critério de convergência estabelecido, para o campo de concentração adimensionalizado, testado com Peclet igual a 2, fator de retardamento igual a 1 e número de Biot infinito.

Mantendo o Biot Infinito, são feitas análises para os casos:

01 - É analisado a influência do Peclet Mássico, Pe , na distribuição da concentração de contaminante no solo considerando constantes o fator de retardamento, R , e o comprimento adimensional, adimensional L^* .

02 - É analisado a influência do fator de retarmento, R , na distribuição da concentração de contaminante no solo considerando constantes o Peclet Mássico, Pe , e o comprimento adimensional, adimensional L^* .

03 - É analisado a influência do comprimento adimensional, L^* , na distribuição da concentração de contaminante no solo considerando constantes o fator de retardamento, R , e o Peclet Mássico, Pe .

4.1 Influência do Peclet no campo de concentração

O número de Peclet mássico é definido como sendo a razão entre a taxa de advecção de uma grandeza física pelo fluxo à taxa de difusão da mesma grandeza por um gradiente apropriado. Para análise da influência do Peclet mássico no campo de concentração num meio poroso saturado, considera-se a não existência de contaminantes no solo inicialmente, isto é, $C_0^*(Y) = 0$ e que o comprimento da célula de resíduos sólido é igual a distância da mesma ao lençol freático, ou seja, $L^* = 1$.

Tabela 4 – Concentração adimensional em $X = 0,5$ para $Pe = 2$ e $R = 1$

Y	t = 0,20	t = 0,50	t = 0,75	t = 0,90
0,0	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
0,1	0,94283296	0,96448542	0,96528969	0,96533542
0,2	0,875713	0,92121051	0,9229012	0,92299734
0,3	0,79940809	0,86857026	0,87114204	0,87128829
0,4	0,71482262	0,80460368	0,80794494	0,80813495
0,5	0,62266809	0,72690131	0,73078401	0,73100481
0,6	0,52303507	0,63249115	0,63657217	0,63680425
0,7	0,41488409	0,51769936	0,52153599	0,52175417
0,8	0,29548113	0,3779822	0,38106283	0,38123802
0,9	0,15981018	0,20772459	0,20951451	0,20961629
1,0	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000

A tabela 4 mostra a distribuição da concentração de contaminantes na posição, $X = 0,5$, para quatro tempos adimensionais distintos e considerando o caso: para o qual valor de Peclet é igual a 2. Com um número de Peclet considerado baixo o escoamento tem baixa velocidade e a parcela advectiva apresenta contribuição bastante limitada. Para tempos adimensionais curtos, a exemplo de $t = 0,20$ pode ser observado uma variação, para os demais resultados com $t > 0,50$ o campo de concentração praticamente não se altera.

Tabela 5 – Concentração adimensional em $X = 0,5$ para $Pe = 10$, $R = 1$

Y	t = 0,02	t = 0,05	t = 0,10	t = 0,20
0,0	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
0,1	0,87306255	0,97557892	0,99681168	0,99983559
0,2	0,66810278	0,92783231	0,99009903	0,99943919
0,3	0,43326383	0,85106441	0,97782745	0,9985199
0,4	0,23236046	0,74492537	0,95749416	0,99637922
0,5	0,10133781	0,61615666	0,92617192	0,99125254

0,6	0,03553548	0,47756402	0,88008975	0,97851301
0,7	0,00994759	0,34416831	0,81226911	0,9457531
0,8	0,00222141	0,22746737	0,70372317	0,85931698
0,9	0,00041216	0,12639115	0,49500298	0,62748384
1,0	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000

A tabela 5 mostra a distribuição da concentração de contaminantes em $X = 0,5$, para quatro tempos adimensionais distintos e considerando o caso: Peclet é igual a 10. Este valor pode ser considerado elevado quando comparados com o da tabela 4. Os resultados apresentam valores distintos, mesmo para tempos curtos. Isto pode ser interpretado que com o aumento da velocidade de escoamento do contaminante, representado pelo aumento no Peclet, os efeitos das mudanças de concentração são bastantes pronunciados. Na tabela, ainda poder ser visto que mesmo para $t=0,20$, não foi alcançado a estabilidade da concentração, necessitando um tempo maior.

Uma outra forma melhor de visualizar o campo de concentração é o emprego de gráficos. Como visto nas seguir as figuras (6-13). As figuras (6-9) que seguem mostram o campo de concentração de contaminantes no solo para Peclet igual a 2, enquanto as figuras (10-13) mostram o mesmo para Peclet igual a 10.

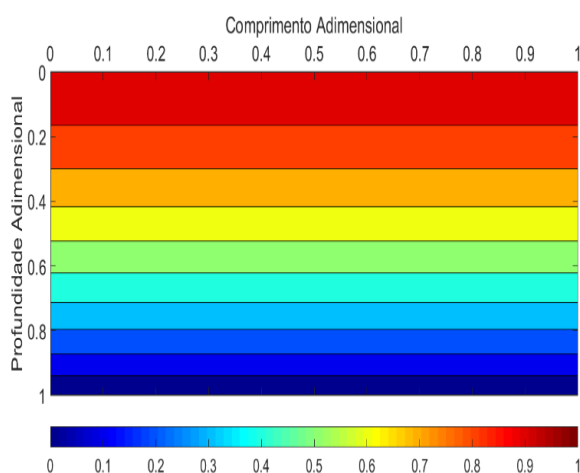


Figure 6. Distribuição da concentração adimensional do poluente para $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,20$

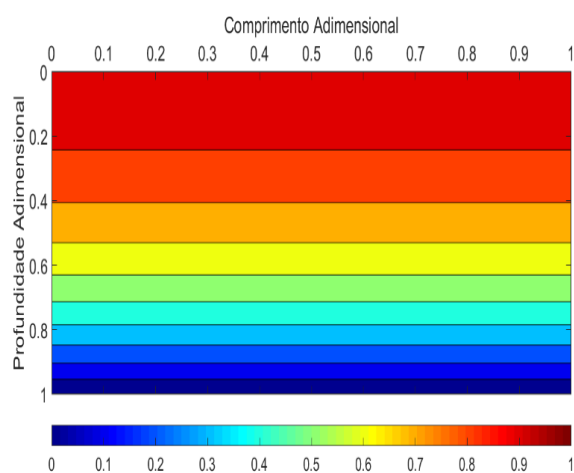


Figure 7. Distribuição da concentração adimensional do poluente para $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,50$

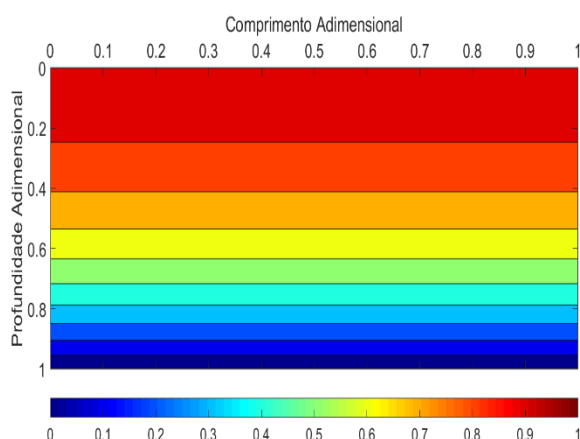


Figure 8. Distribuição da concentração adimensional do poluente para $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,75$

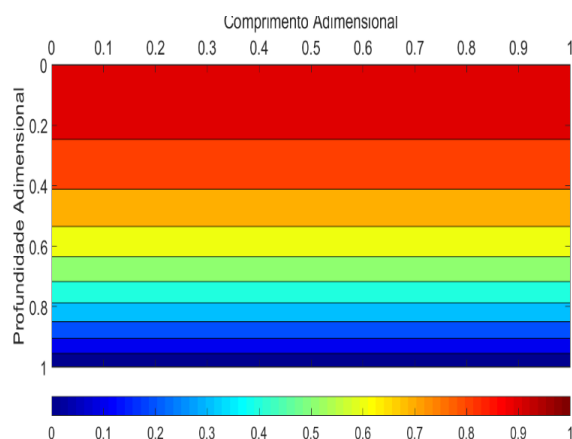


Figure 9. Distribuição da concentração adimensional do poluente para $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0,90$

Nas figs. (6-9) avaliou-se a distribuição do campo de concentração para diferentes tempos adimensionais e $Pe = 2$ e $R=1$, onde verifica-se que a medida que se aumenta o tempo adimensional a contaminação proveniente da célula RSU tende a ficar praticamente constante e cobrindo cerca de 70% do solo.

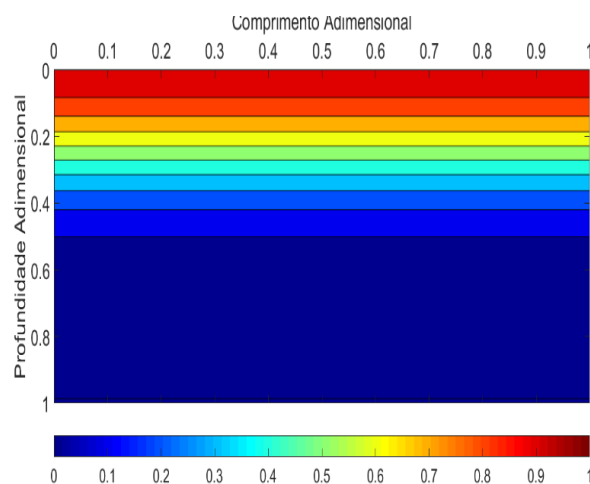


Figura 10. Distribuição da concentração adimensional do poluente para $Pe = 10$, $R = 1$ e $\tau = 0,02$

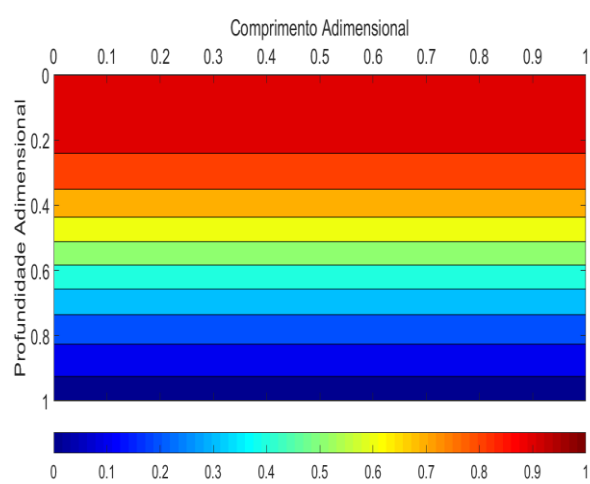


Figura 11. Distribuição da concentração adimensional do poluente para $Pe = 10$, $R = 1$ e $\tau = 0,05$

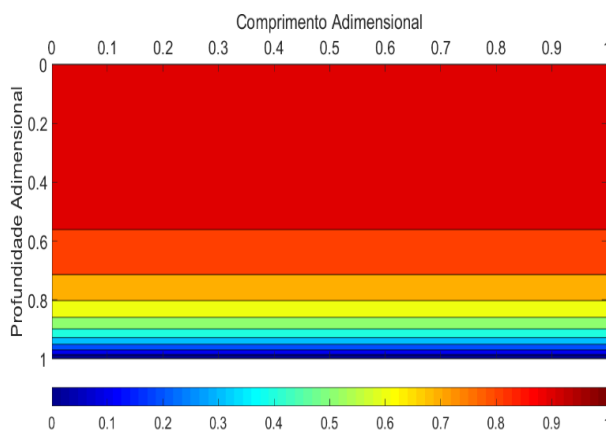


Figura 12. Distribuição da concentração adimensional do poluente para $Pe = 10$, $R = 1$ e $\tau = 0,10$

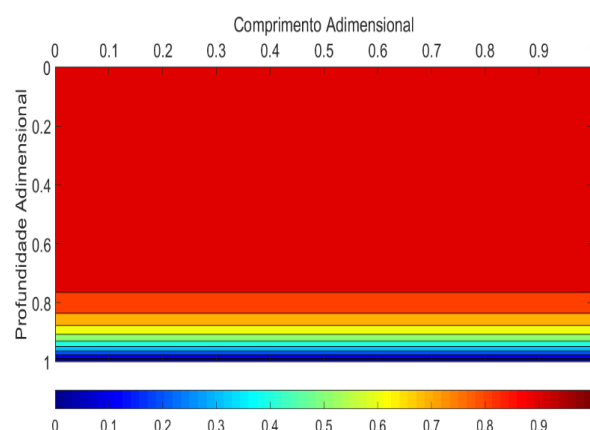


Figura 13. Distribuição da concentração adimensional do poluente para $Pe = 10$, $R = 1$ e $\tau = 0,20$

Nas figs. (10-13) avaliou-se, para diferentes tempos adimensionais, a distribuição de concentração considerando $Pe = 10$ e $R=1$. Constatou-se que a contaminação do solo ocorre de forma mais rápida em relação ao caso anterior, de modo que no tempo adimensional $\tau = 0,20$ praticamente 85% do solo já está contaminado.

Com base na análise feita, verificamos uma forte influência do Peclet na distribuição de concentração de contaminante no solo, uma vez que com o aumento da velocidade de escoamento do contaminante, representado pelo aumento do número de Peclet temos uma aceleração do processo de contaminação do solo.

4.2 Influência do Fator de Retardamento

O fator de retardamento definido em (2.11) representa uma medida da capacidade de retenção ou efeito tampão do solo para o deslocamento de determinado elemento ou composto existente em um solvente. Analogamente ao tópico anterior, considera-se para esse caso, $C_0^*(Y) = 0$ e $L^* = 1$.

Tabela 6 – Concentração adimensional em $X = 0,5$ para $Pe = 2$, $R = 5$

Y	t = 0,05	t = 0,10	t = 0,20	t = 0,50
0,0	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
0,1	0,52772764	0,67762259	0,79213746	0,89522577
0,2	0,19090161	0,38351874	0,5760185	0,77674047
0,3	0,04540513	0,17800389	0,38151743	0,65146633
0,4	0,00692012	0,06687305	0,22874961	0,52686606
0,5	0,00066513	0,0201485	0,12356221	0,40969737

0,6	0,0000403	0,00483699	0,05990396	0,30487232
0,7	0,0000023	0,00092131	0,02598285	0,21458073
0,8	0,0000013	0,00013941	0,01002145	0,13768692
0,9	0,0000015	0,0000176	0,0032382	0,06925838
1,0	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000

A tabela 6 mostra a distribuição da concentração de contaminantes em $X = 0,5$, com o fator de retardamento igual à 5 e com o número de Peclet igual a 2, para quatro tempos adimensionais distintos. Os dados da tabela 6 mostram que, mesmo para tempos relativamente altos, o campo de concentração de contaminantes tende a cobrir apenas 40% do solo, o que mostra uma boa retenção quando comparado com o caso do Fator de retardamento igual a 1 e Peclet igual a 2 visto na tabela 4. Esta maior retenção da pluma de contaminação pode ser vista nas figuras (14-17) a seguir.

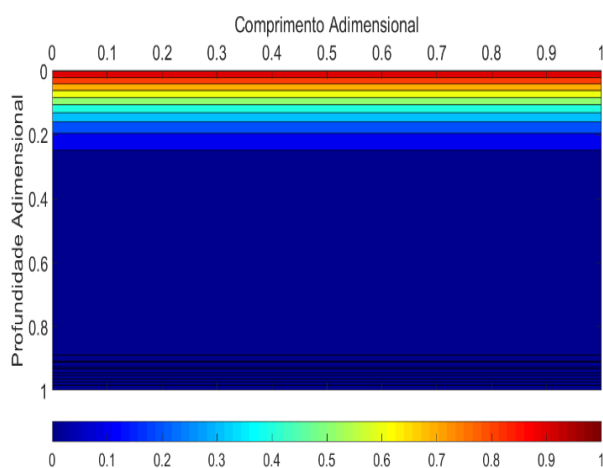


Figura 14. Distribuição da concentração adimensional do poluente para $Pe = 2$, $R = 5$ e $\tau = 0,05$

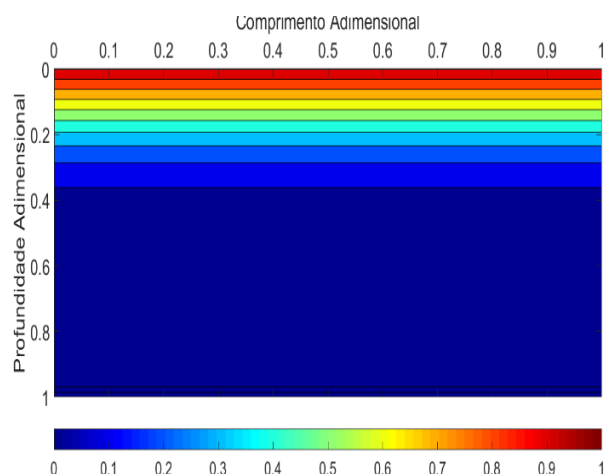


Figura 15. Distribuição da concentração adimensional do poluente para $Pe = 2$, $R = 5$ e $\tau = 0,10$

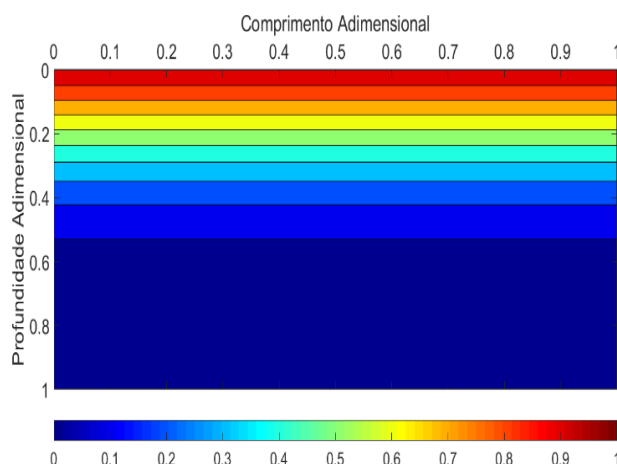


Figura 16. Distribuição da concentração adimensional do poluente para $Pe = 2$, $R = 5$ e $\tau = 0,20$

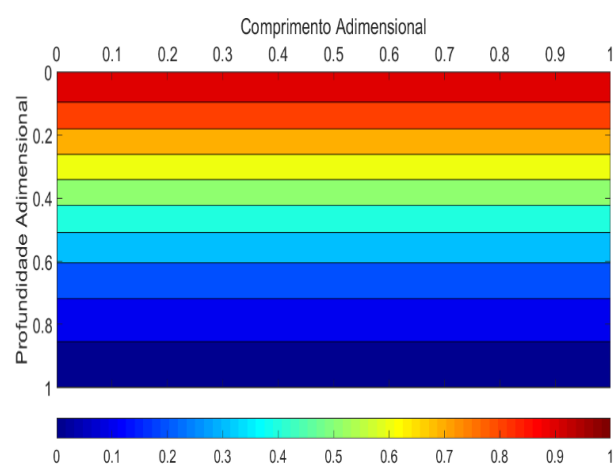


Figura 17. Distribuição da concentração adimensional do poluente para $Pe = 2$, $R = 5$ e $\tau = 0,50$

Nas figuras. (14-17) avaliou-se, para diferentes tempos adimensionais, o campo de concentração considerando $Pe = 2$ e $R = 5$. Constatou-se que a contaminação do solo ocorre de forma mais lenta em relação ao caso $Pe = 2$ e $R = 1$, visto nas figuras (6-9).

Tabela 7 – Concentração adimensional em $X = 0,5$ para $Pe = 10$, $R = 5$

Y	t = 0,05	t = 0,10	t = 0,15	t = 0,20
0,0	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
0,1	0,7137892	0,8730625	0,9321634	0,9603673
0,2	0,3649759	0,6681028	0,8107687	0,8854759
0,3	0,1256302	0,4332638	0,643672	0,7720175
0,4	0,0280638	0,2323605	0,4580255	0,6276993
0,5	0,0039896	0,1013378	0,2880585	0,4703817
0,6	0,0003707	0,0355355	0,1584621	0,3218355
0,7	0,0000443	0,0099476	0,075672	0,1995429
0,8	0,0000338	0,0022214	0,0311776	0,1110967
0,9	0,0000445	0,0004122	0,0107559	0,0522957
1,0	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000

A tabela 7 mostra a distribuição da concentração de contaminantes em $X = 0,5$, para quatro tempos adimensionais distintos e considerando o caso: Peclet é igual a 10 e Fator de retardamento igual a 5. Os resultados apresentados mostram que, para tempos curtos, o campo de concentração de contaminantes tende a se propagar mais lentamente, quando confrontado com os dados da tabela 5, que apresenta o mesmo Peclet mas com Fator de retardamento igual a 1. Isto pode ser interpretado que com o aumento da porosidade do solo, isto é, um maior número de vazios no solo, representado pela diminuição no Fator de Retardamento, os efeitos das mudanças de concentração são atenuados. Como já era

esperado, constatou-se que com o Fator de Retardamento maior, maior também será o tempo para a concentração de contaminante atingir o lençol freático. Na tabela, ainda poder ser visto que mesmo para $t=0,20$, não foi alcançado a estabilidade da concentração, necessitando um tempo maior.

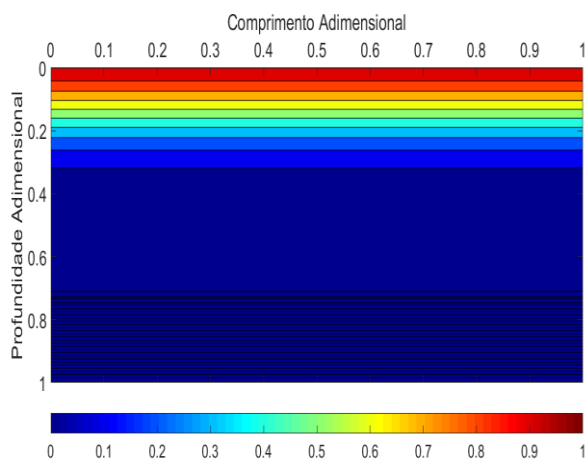


Figura 18. Distribuição da concentração adimensional do poluente para $Pe = 10$, $R = 5$ e $\tau = 0,05$

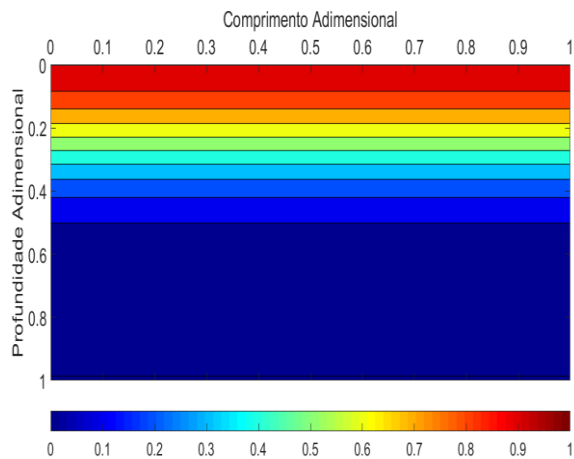


Figura 19. Distribuição da concentração adimensional do poluente para $Pe = 10$, $R = 5$ e $\tau = 0,10$

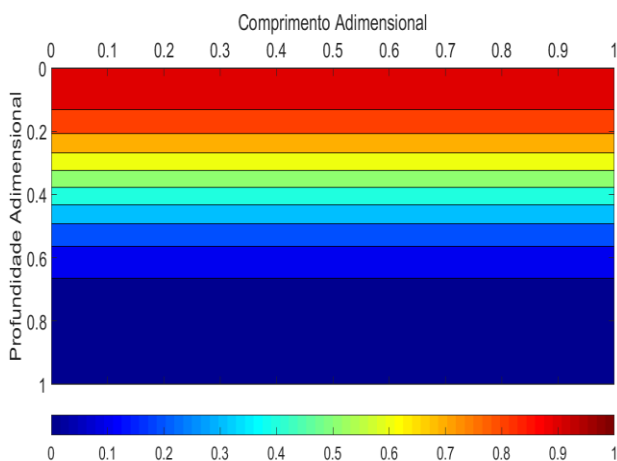


Figura 20. Distribuição da concentração adimensional do poluente para $Pe = 10$, $R = 5$ e $\tau = 0,15$

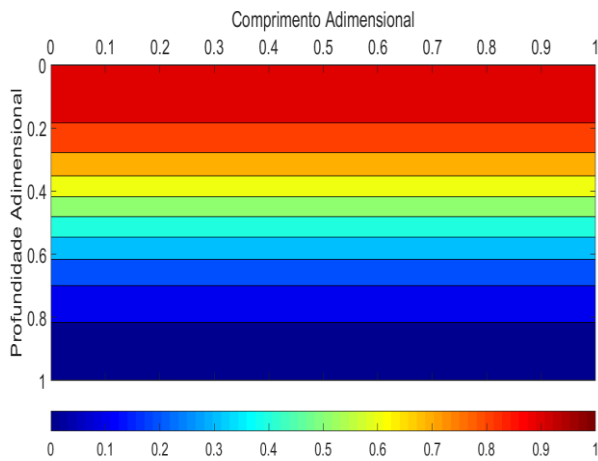


Figura 21. Distribuição da concentração adimensional do poluente para $Pe = 10$, $R = 5$ e $\tau = 0,20$

As figuras (18-21) mostram a distribuição da concentração adimensional de contaminante para o caso: Peclet igual a 10 e Fator de Retardamento igual a 5 para quatro tempos adimensionais distintos. Observa-se que a pluma de contaminação se desenvolve lentamente, quando comparado com o caso que apresenta o mesmo número de Peclet, mas com Fator de Retardamento igual a 1, figuras (10-13). Como no caso anterior, fica evidente o forte efeito do Fator de Retardamento na propagação de contaminantes no solo.

4.3 Influência do comprimento adimensional

Para análise da influência do comprimento adimensional no campo de concentração num meio poroso saturado, considera-se como nos casos anteriores, a não-existência de contaminantes no solo no instante inicial, isto é, $C_0^*(Y) = 0$.

Tabela 8 – Concentração adimensional em $X = 0,5$ para $L^* = 10$ com $Pe = 2$ e $R = 1$

Y	$\tau = 0,10$	$\tau = 0,25$	$\tau = 0,50$	$\tau = 0,75$
0,0	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
0,1	0,8029289	0,9521370	0,9644845	0,9652896
0,2	0,5930735	0,8952550	0,9212085	0,9229011
0,3	0,3955849	0,8290945	0,8685673	0,8711420
0,4	0,2306384	0,7533265	0,8045998	0,8079449
0,5	0,1088239	0,6673278	0,7268969	0,7307839
0,6	0,0307139	0,5698882	0,6324865	0,6365721
0,7	0,0101618	0,4588570	0,5176950	0,5215359
0,8	0,0231460	0,3307418	0,3779787	0,3810628
0,9	0,0172360	0,1802797	0,2077225	0,2095144
1,0	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000

A tabela 8 mostra a distribuição da concentração de contaminantes em $X = 0,5$, para quatro tempos adimensionais distintos. Constatou-se que: Como no caso em que $L^* = 1$, para os mesmos números de Peclet e Fator de Retardamento, observados na tabela 4, temos para tempos $t > 0,50$ o campo de concentração praticamente constante, isto pode ser melhor observado nas figuras a seguir.

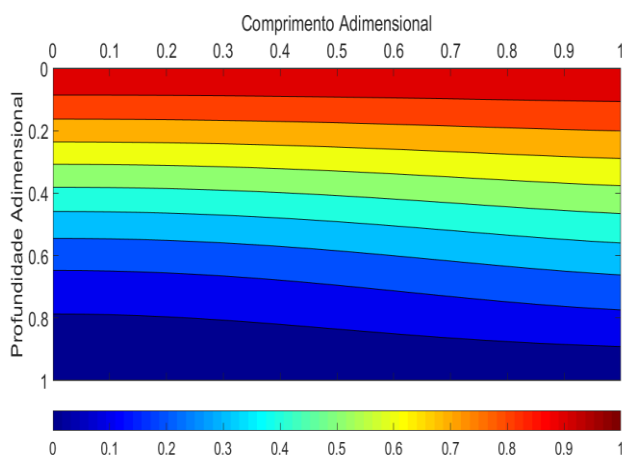


Figura 22. Distribuição da concentração adimensional do poluente para $L^* = 10$, $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0.10$

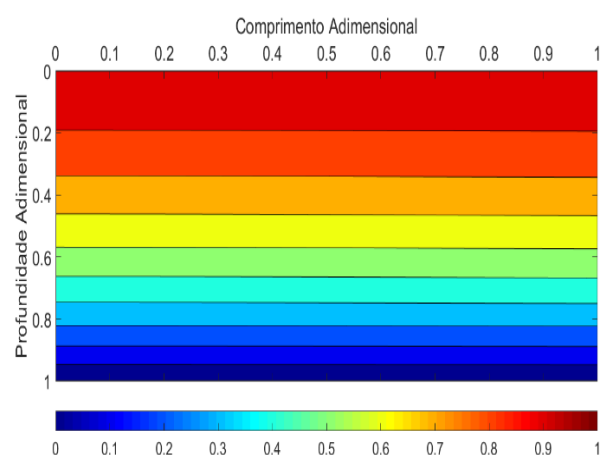


Figura 23. Distribuição da concentração adimensional do poluente para $L^* = 10$, $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0.25$

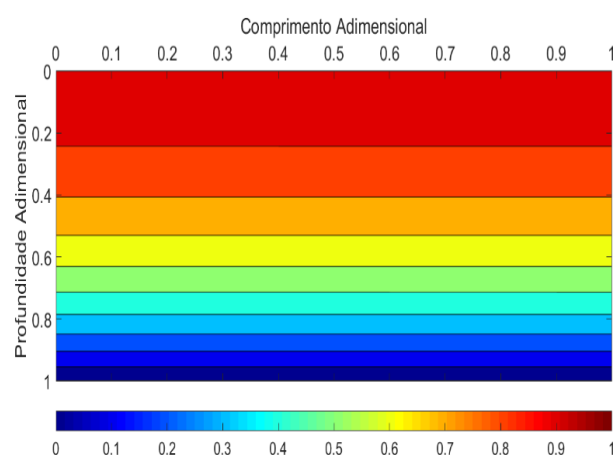


Figura 24. Distribuição da concentração adimensional do poluente para $L^* = 10$, $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0.50$

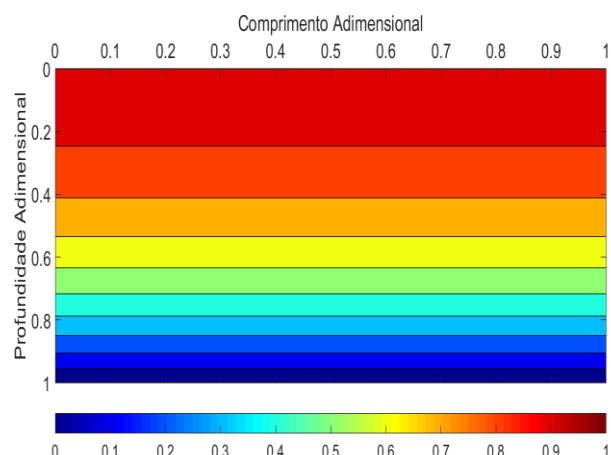


Figura 25. Distribuição da concentração adimensional do poluente para $L^* = 10$, $Pe = 2$, $R = 1$ e $\tau = 0.75$

As figuras (22-25) mostram o campo de concentração adimensional para o caso em que $L^* = 10$, O número de Peclet é igual a 2 e o Fator de retardamento é igual a 1 para quatro tempos adimensionais. Observou-se que, como no mesmo caso com $L^* = 1$, para tempos adimensionais $t \geq 0,50$ as figuras não se alteram, o que evidencia que para os comprimentos adimensionais analisados, o campo de concentração não apresenta influência, podendo ser melhor analisados para grandes diferenças para os comprimentos adimensionais.

4.4 Grandezas de interesse prático

Para o cálculo das grandezas de interesse prático, como concentração média e número de Sherwood foi utilizado o programa *Mathematica 9.0*, considerando $X = 0,5$.

4.4.1 Concentração média adimensional

A concentração média adimensionalizada para o campo de concentração de contaminantes em termos do tempo adimensional é definido por

$$\overline{C}_m^* = \frac{\int_0^1 e^{-Pe \cdot Y} \cdot C^*(X, Y, \tau) dY}{\int_0^1 e^{-Pe \cdot Y} dY} \quad (4.1)$$

onde para efeito de cálculos, consideramos \overline{C}_m^* em $X = 0,5$.

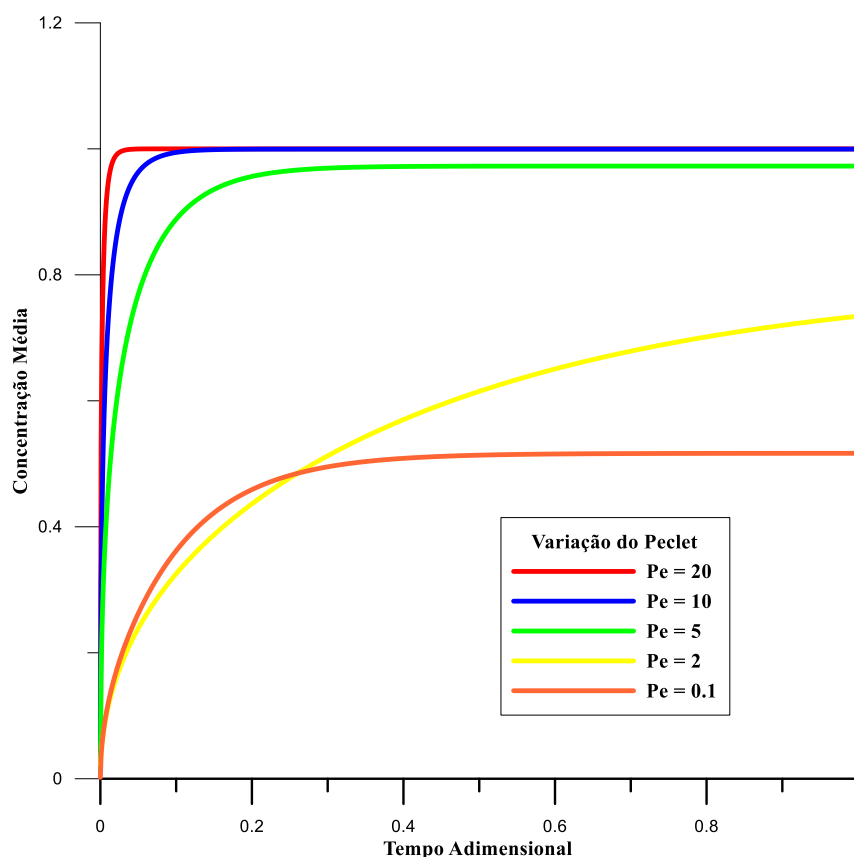


Figura 26 – Concentração Média para $L^* = 1$ e $R = 1$

A figura 26 mostra o desenvolvimento da concentração média em termos do tempo adimensional considerando a variação do número de Peclet, onde percebe-se que para comprimento adimensional e Fator de Retardamento constantes, mais rápido o desenvolvimento do perfil de concentração e o solo estará contaminado para valores crescente do número de Peclet.

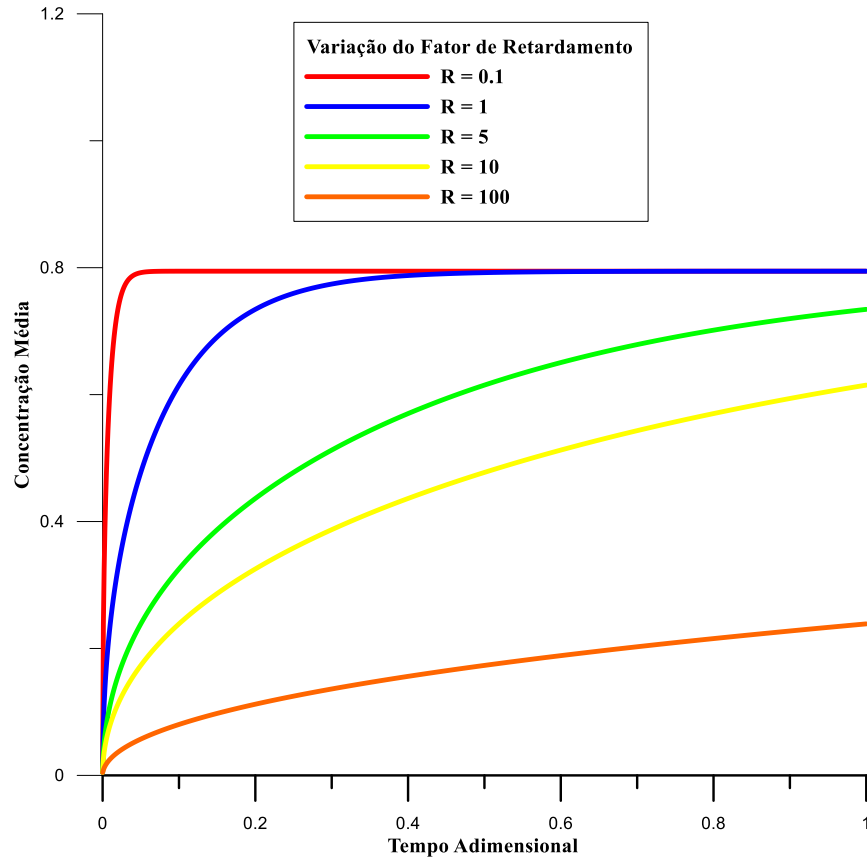


Figura 27 – Concentração Média para $L^* = 1$ e $Pe = 2$

A figura 27 mostra o desenvolvimento da concentração média em termos do tempo adimensional considerando a variação do Fator de Retardamento, onde constata-se que quanto maior o Fator de Retardamento, menor será a concentração média.

4.4.2 Número de Sherwood

O número de Sherwood $Sh(\tau)$ é um número adimensional que representa a razão de transferência de massa convectiva e difusiva. Considerando a condição de contorno na interface Solo/Lençol freático, temos

$$-\frac{\partial C^*(X,1,\tau)}{\partial Y} = \frac{h_m L_1}{D} \left[\overline{C_m^*} - C^*(X,1,\tau) \right] \quad (4.2)$$

mas,

$$Sh(\tau) = \frac{h_m L_1}{D} \quad (4.3)$$

Logo,

$$Sh(\tau) = - \frac{\frac{\partial C^*(X,1,\tau)}{\partial Y}}{C_m^* - C^*(X,1,\tau)} \quad (4.4)$$

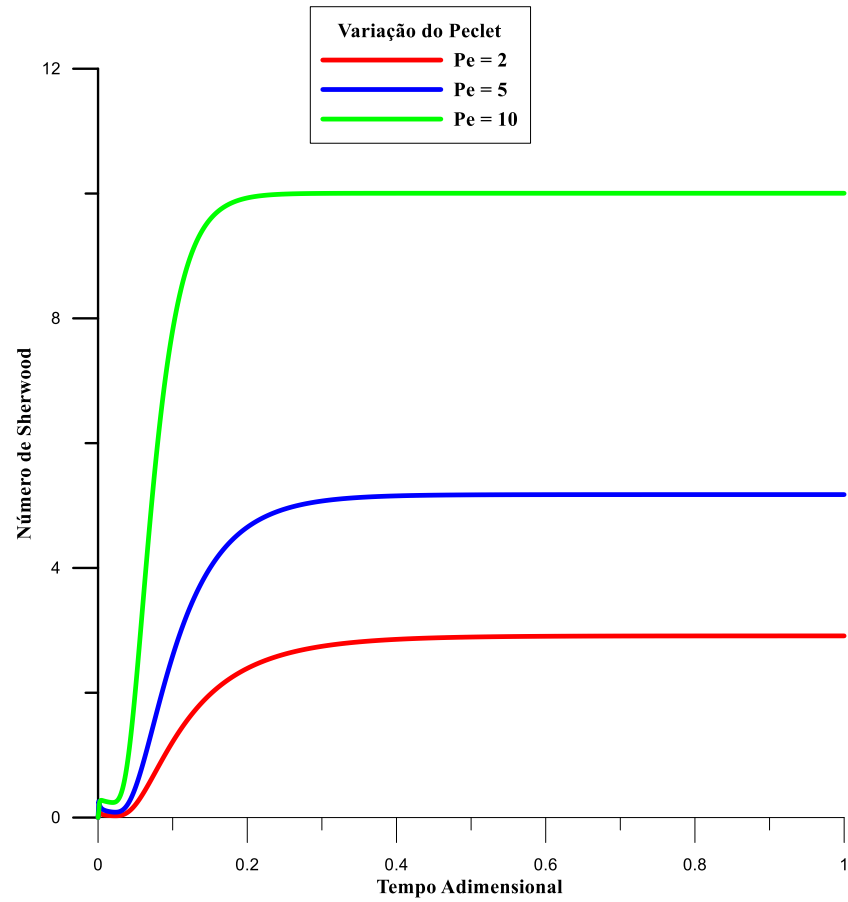


Figura 28 – Número de Sherwood para $L^* = 1$ e $R = 1$

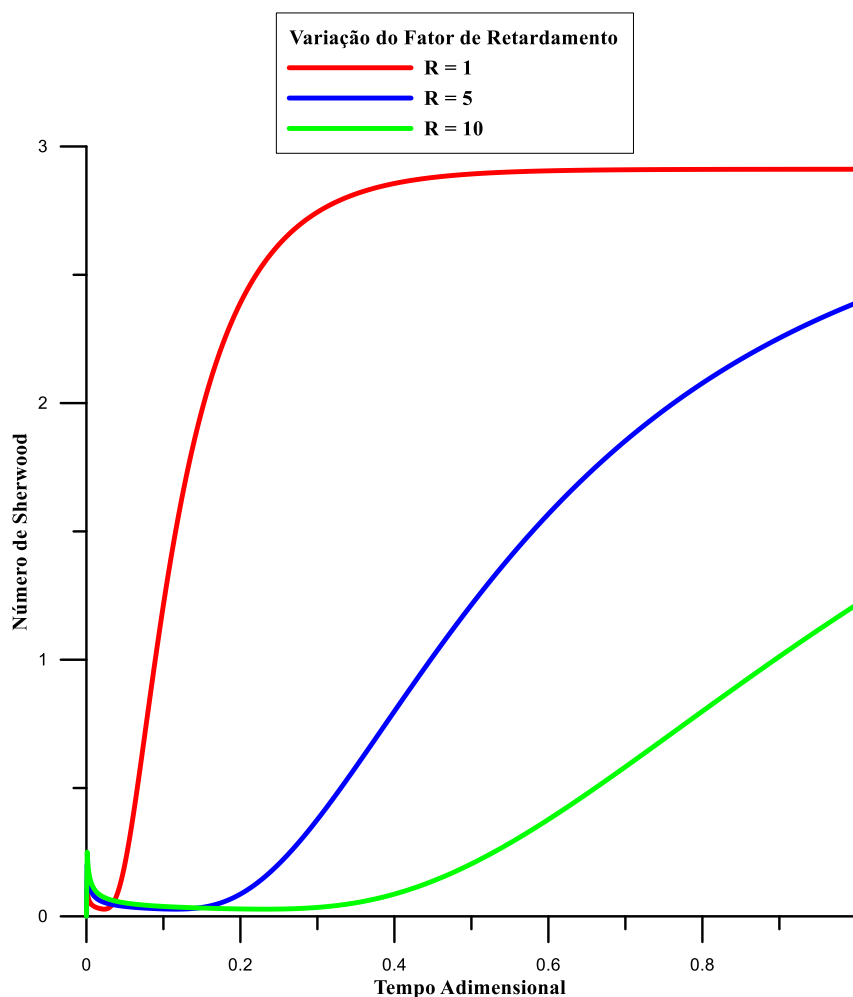


Figura 29 – Número de Sherwood para $L^* = 1$ e $Pe = 2$

As figuras 28 e 29 mostram, respectivamente, o número de Sherwood, considerando as variações do Peclet e do Fator de Retardamento para as condições dadas. Na figura 28 avaliou-se que para tempos adimensionais pequenos, $0 < \tau < 0.2$, o número de Sherwood sofre alterações, de forma que, quanto maior o número de Peclet, maior será o número de Sherwood, para $\tau > 0.2$, o número de Sherwood se estabiliza, mas mantendo o mesmo padrão, isto é, quanto maior o Peclet, maior o número de Sherwood. Já na figura 29 observa-se que, para tempos adimensionais pequenos, o número de Sherwood apresenta pequenas variações, e que o início de variações significativas ocorrem em função do crescimento do Fator de Retardamento, perceptíveis para tempo $\tau > 0.2$.

Capítulo V

Conclusões

O estudo da contaminação do solo se apresenta como um problema de abordagem complexa, do ponto de vista matemático, e importante para o auxílio na proteção do meio ambiente. No presente estudo o foco foi análise visando levantar parâmetros de interesses práticos que possibilitem a seleção de ambientes para aterros sanitários de modo a minimizar os efeitos nocivos aos lençóis freáticos.

No processo de solução do problema formulado a aplicação da GITT se mostrou eficaz na manipulação das equações com a obtenção de solução explícita para o campo de concentração de contaminante, numa forma mais geral adimensionalizada, que permite a um rápido estudo paramétrico. Desta forma, os objetivos foram alcançados satisfatoriamente, onde foi mostrada a influência do Peclet mássico sobre o campo de concentração. Mostrou-se também a influência do fator de retardamento do solo e do comprimento adimensional sobre a distribuição da concentração do poluente. A partir do estudo teórico realizado pode-se propor a otimização da instalação de futuros aterros sanitários levando em conta os parâmetros estudados.

Valores de interesse práticos, tais como a concentração média e número de Sherwood foram calculados e os resultados mostrados na forma de gráficos que permitiram visualizar de forma clara os efeitos dos parâmetros mencionados.

Dentre os parâmetros estudados destaque deve ser dado para a importância do fator de retardamento. Visto que nos resultados tanto para concentração média quanto para o número de Sherwood foi observado que quanto maior este fator maior o tempo para a propagação do contaminante. Isto pode ser associado a um solo com menor número de vazios, representado pela baixa porosidade. Um outro fator analisado que se mostrou importante foi o número de Peclet, que também tem uma relação com o tipo do solo,

através da dispersividade e da velocidade advectiva permitida pela porosidade e a densidade do contaminante.

Como sugestão para trabalhos futuros, dando continuidade à mesma linha de pesquisa, propõe-se:

- Formular um problema do campo de concentração de contaminante no solo acoplado com o campo de temperatura;
- Resolver o problema considerando uma função de vazamento na interface Célula RSU/Solo, isto é, $C(x, 0, t) = f(x)$.
- Resolver o problema considerando a porosidade variável.

Referências Bibliográficas

- ANTONIO, R. N., *Soluções Híbridas para Problemas de Migração de Contaminantes no Solo*. Tese de D.Sc. Universidade Federal Do Rio De Janeiro, Rio de Janeiro – RJ, 2005.
- ARÊAS, V. F. *Estudo Experimental e Analítico do Transporte de Contaminantes em Meios Porosos*. Tese de D.Sc., Universidade Federal Do Rio De Janeiro, Rio de Janeiro – RJ. 2006.
- BEAR, j., “Dynamics of fluids in porous media”. *American Elsevier*. New York. 1972.
- BORGES, A. F., BARROSO, E. V., “Análise da utilização de geofísica e biorremediação em problemas de contaminação de solo e água subterrânea”. *Anuário do Instituto de Geociências*, v. 20, p. 107-142, 1997.
- CAMPOS, “Solos”. *Revista Ação Ambiental*. ANO 1, n. 1, 1998.
- CARNEIRO, G. A., *Estudo de Contaminação do Lençol Freático sob a Área do Aterro de Lixo do Jockey Club - DF e suas Adjacências*. Dissertação de M.Sc., Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2002.
- CASTILHOS JUNIOR, A. B. de., “Alternativas de disposição de resíduos sólidos urbanos para pequenas comunidades”. *coletânea de trabalhos técnicos*, Rio de Janeiro – RJ, 2002.
- CONDE, T. T., STACHIW, R., FERREIA, E., “Aterro sanitário como alternativa para a preservação ambiental”. *Revista Brasileira de Ciências da Amazônia*, v. 3, n. 1, pp. 69-80, 2015.
- COTTA, R. M.; MIKHAILOV, M. D.; “Hybrid Solutions for Contaminant Transport In Fractured Porous Medium”, *Hybrid Meth. Engng.*, Vol. 4, nos. 1&2. 2002.
- COTTA, R. M.; MIKHAILOV, M. D.; UNGS, M. J.; “Contaminant Transport in Finite Fractured Porous Medium: Integral Transforms and Lumped-Differential Formulations”, *Annals of Nuclear Energy*, V.30, no 3, pp.261-285. 2003.
- DE SÁ, L. F., JUCÁ, J. F. T., DA MOTTA SOBRINHO, M. A., “Tratamento do lixiviado de aterro sanitário usando destilador solar/Treatment of landfill leachate using a solar destilar”. *Revista Ambiente & Água*, v. 7, n. 1, pp. 204-217, 2012.
- DOMENICO, P. A. e SCHWARTZ, F. W., *Physical and Chemical Hidrogeology*, 2 ed., New York, John Wiley & Sons Inc., 1998.
- FORTUNA, A. O., *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos*. São Paulo – SP, Editora da Universidade de São Paulo, 2000.
- FREEZER, R. A., CHERRY, J. A., *Groundwater*. Prentice-Hall, Ind., Nova Jersey. 1979.
- IGNATIUS, S. G., *Fluxo unidirecional de gás através de um solo compactado—determinação laboratorial dos parâmetros*. Tese de D.Sc., EPUSP, São Paulo – SP, 1999.
- JUCÁ, J. F. T., “Disposição final dos resíduos sólidos urbanos no Brasil”. In: *Congresso Brasileiro De Geotecnica Ambiental-REGEO*. pp. 1-32, Porto Alegre – RS, fevereiro, 2003.
- KORF, E. P. et al. “RETENÇÃO DE METAIS EM SOLO DA ANTIGA ÁREA DE DISPOSIÇÃO DE RESÍDUOS SÓLIDOS URBANOS DE PASSO FUNDO—RS”. *Revista de Ciências Ambientais*, v. 2, n. 2, p. p. 43-60, 2008.

- LANGE, L. C., SIMÕES, G. F., FERREIRA, C. F. A., COELHO, H. M. G., “Estudo do transporte de contaminantes em meios porosos aplicado a aterros de disposição de resíduos sólidos urbanos”. *coletânea de trabalhos técnicos*, Florianópolis – SC, p. 85 – 91. 2002.
- LERMAN, A., *Geochemical processes: water and sediment environments*, John Wiley and Sons, Inc., Nova Iorque. 1979.
- LIMA, G. H. *Modelagem e simulação numérica de escoamento sólido-fluido sobre meio poroso heterogêneo*. Dissertação de M.Sc., Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, PR. 2016.
- NAKAMURA, C. Y; MARQUES, E; VILELA, P; ODA, T; LIMA, L; COSTA, R; AZEVEDO, I. C., “Avaliação Da Qualidade Da Água Subterrânea No Entorno De Um Aterro Sanitário”. *Revista Águas Subterrâneas*, São Paulo – SP, p. 28 – 40. 2014.
- NOBRE, M. M. M. *Estudo experimental do transporte de poluentes em solos argilosos compactados*. Dissertação de M.Sc., Departamento de Engenharia Civil, PUC-RIO, Rio de Janeiro, RJ. 1987.
- MIKHAILOV, M. D. and ÖZISIK, M. N., “Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion”, John Wiley, New York. 1984.
- OGATA, A., “Theory of dispersion in a granular médium”. *U. S. Geological Survey Professional*. p. 411 – I.
- PAULA, F. R. A. *Determinação Do Coeficiente De Difusão Através De Um Fluxo Unidimensional Em Um Solo Não Saturado*. Dissertação de M.Sc., Centro de Ciências e Tecnologia, da Universidade estadual do Norte Fluminense, Campos dos Goytacazes – RJ. 2006.
- TOZETTO, C. M., *Modelagem Matemática De Aterros Sanitários Com A Simulação Hidrológica Da Geração De Lixiviado: Estudo De Caso Do Aterro Sanitário De Curitiba.*, Dissertação de M.Sc., Universidade Federal do Paraná, Curitiba – PR. 2008.
- TRISTÃO, D. S. C., *Esquemas centrais para leis de conservação em meios porosos*. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora – MG. 2013